

## Calcul des distributions statistiques de base

Jean-Louis Halbwachs

*Observatoire de Strasbourg*

**Abstract.** The statistical properties of binary stars are key for understanding their formation process and/or their evolution. Methods dedicated to the following problems are presented :

- Simulation of a sample of binary stars.
- Derivation of the distribution of mass ratios of single-lined spectroscopic binaries.
- Correction of the distributions of mass ratios and of periods of spectroscopic binaries for selection effects.
- Calculation of the distribution of mass ratios by taking into account the selection effects for a sample of visual binaries.
- Calculation of the distribution of projected separations by taking into account the selection effects for a sample of visual binaries.

Some statistical properties of binary stars are presented and briefly discussed.

### 1. Introduction

Les propriétés statistiques des binaires sont des indices précieux sur leur processus de formation, ainsi que sur leur évolution ultérieure. Les paramètres les plus pertinents en ce sens sont :

- Le rapport de masses,  $q = \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1$ , où  $\mathcal{M}_1$  désigne la composante la plus brillante.
- Le demi-grand axe,  $a$ , ou la période,  $P$ . La troisième loi de Kepler relie ces paramètres en les rendant peu dépendant de la masse. Pour une période donnée, un doublement de la masse entraîne un allongement du demi-grand axe de 26 % seulement. En conséquence, pour un échantillon de binaires de même masse primaire, les distributions statistiques de  $a$  et de  $P$  sont pratiquement équivalentes, le passage de l'une à l'autre ne dépendant quasiment pas des rapports de masses.

- L'excentricité,  $e$ . Pour des couples d'étoiles de la séquence principale,  $q$  et  $P$  restent pratiquement inchangés depuis la formation du couple et la dissipation de la nébuleuse protostellaire. Par contre, si le couple est serré, l'excentricité s'atténue au fil du temps, en raison des effets de marée ; si, au contraire, la séparation est importante, l'excentricité peut aussi évoluer sous l'influence des étoiles voisines.

Le problème qui nous est posé est de passer de la distribution des observables d'un échantillon d'étoiles doubles aux distributions des paramètres physiques de l'ensemble des binaires. Il nous faudra pour cela trouver les distributions de  $q$ ,  $P$  et  $e$  des binaires observées, mais aussi corriger ces distributions des effets de sélection inhérents aux échantillons d'étoiles que l'on aura utilisés. Ces questions peuvent parfois se traiter par des méthodes directes, comme nous le verrons plus loin ; sinon, il faut faire appel à la simulation.

Avant d'aborder les problèmes spécifiques à certaines catégories d'étoiles doubles, nous verrons d'abord quelques points généraux.

## 2. Principes de base de la simulation

La simulation numérique est une technique extrêmement puissante, puisqu'elle permet de traiter les problèmes qui résistent à une approche directe. Elle part d'un modèle censé décrire les propriétés statistiques des binaires dans l'espace, et consiste à produire des jeux de paramètres (rapport de masses, période, excentricité, inclinaison, magnitude, ..) définissant chacun une binaire fictive. En pratique, les binaires fictives sont créées, traitées, et comptabilisées une à une ; il est inutile de saturer les machines en manipulant des échantillons pléthoriques, du moment que chaque objet est indépendant des autres. On calcule les paramètres observables des binaires fictives, et on sélectionne celles qui satisfont aux critères de sélection des binaires réellement observées. Si les binaires fictives ainsi retenues ont des observables qui suivent les mêmes distributions que les binaires de l'échantillon vrai, on en conclut que le modèle utilisé est proche de la réalité. La comparaison entre modèle et observations se fait sur la base de tests statistiques, le plus employé étant le test de Kolmogorov-Smirnov (voir, par exemple, Saporta 1990). Une remarque s'impose à ce propos : les tests statistiques ne sont significatifs qu'au sens du rejet. Par conséquent, cette approche diffère fondamentalement des méthodes directes en ce sens qu'au lieu de faire remonter des données à une solution unique, elle permet plutôt de sélectionner les modèles qui sont incompatibles avec les observations.

Si un paramètre  $p$  suit une distribution  $f$  donnée, sa valeur  $x$  s'obtient en résolvant l'équation :

$$\int_{-\infty}^x f(p)dp = u \quad (1)$$

ou  $u$  est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et suivant une distribution constante. Une série de valeurs de  $u$  peut être produite avec l'algorithme suivant : soit trois entiers  $I$ ,  $J$  et  $K$ , initialisés à 1 en début de processus. On calcule leurs nouvelles valeurs,

$$\begin{aligned} I &= \text{mod}(171 \times I, 30269) \\ J &= \text{mod}(172 \times J, 30307) \\ K &= \text{mod}(170 \times J, 30323) \end{aligned} \quad (2)$$

et on en déduit

$$v = \frac{I}{30269} + \frac{J}{30307} + \frac{K}{30323} \quad (3)$$

puis

$$u = v - \text{int}(v) \quad (4)$$

Bien entendu, les nouvelles valeurs de  $I$ ,  $J$  et  $K$  seront à la base du prochain tirage de  $u$ .

Il peut arriver que l'équation 1 soit insoluble, la fonction  $f$  n'étant pas intégrable. En particulier, c'est le cas de la distribution de Gauss. En pratique, la loi normale d'écart-type  $\sigma$  et de moyenne  $p_0$  se simule en produisant un vecteur à deux dimensions dont la norme suit une distribution de Rayleigh, et en le projetant sur les deux axes de référence. Concrètement, on produit deux nombres aléatoires  $u_1$  et  $u_2$ , et on obtient deux valeurs indépendantes,

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2) \\ p_2 &= p_0 + \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) \end{aligned} \quad (5)$$

qui suivent toutes deux la loi souhaitée.

### 3. Quelques distributions statistiques de base

#### 3.1 Distribution des inclinaisons

Il n'est pas exclu que l'orientation des plans orbitaux suive localement des directions préférentielles. En particulier, ce pourrait être le cas dans les amas ouverts. Cependant, dans un échantillon d'étoiles de champ distribuées sur l'ensemble du ciel, les orientations des orbites *par rapport à la ligne de visée* sont très vraisemblablement isotropes. Par conséquent, la probabilité d'avoir une inclinaison dans les limites  $i \pm di/2$

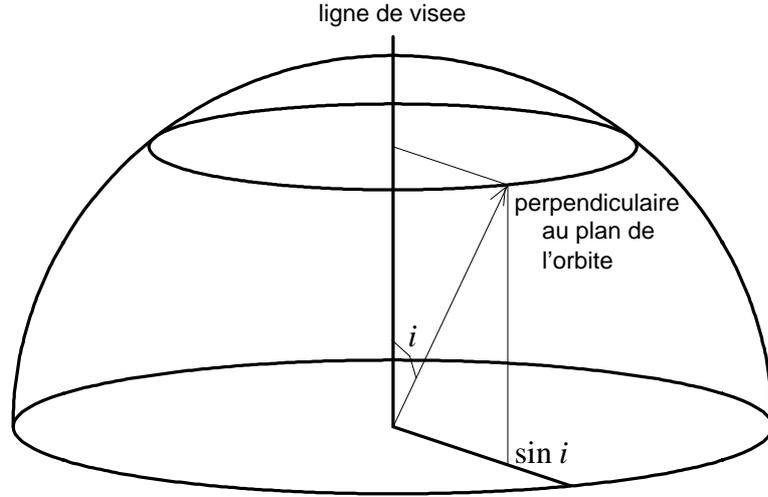


Figure 1.: *Distribution des inclinaisons des orbites. Si la distribution des orientations est isotrope, la probabilité d'avoir l'inclinaison  $i$  est proportionnelle à  $\sin i$ .*

est proportionnelle à l'aire de la couronne de rayon  $\sin i$  et de hauteur  $di$  (voir Figure 1). En conséquence, la distribution des inclinaisons est

$$f_i(i) = \sin i \quad (6)$$

si nous définissons  $i$  entre 0 et  $\pi/2$ .

### 3.2 Distribution des magnitudes apparentes

Cette distribution peut être utile pour la production d'échantillons simulés, et elle est importante dans l'évaluation du biais de magnitude traité à la section suivante.

Si nous considérons des étoiles au voisinage du Soleil, nous pouvons supposer que la densité par unité de volume,  $\rho$ , est constante. Dans ce cas, le nombre d'étoiles de distance comprise entre  $D - dD/2$  et  $D + dD/2$  sera :

$$n_D(D \pm dD/2) = 4\pi\rho D^2 dD \quad (7)$$

Comme on sait que

$$\log D = \frac{m - M + 5}{5} \quad (8)$$

on en déduit que, à magnitude absolue donnée, le nombre d'étoiles de magnitude apparente comprise entre  $m - dm/2$  et  $m + dm/2$  est

$$n_m(m \pm dm/2) = 800 \pi \rho \ln 10 e^{-\frac{3 \ln 10}{5} M} \times e^{\frac{3 \ln 10}{5} m} dm \quad (9)$$

Si nous considérons des étoiles lointaines, nous aurons une concentration dans le plan galactique. Dans un cas extrême, nous pouvons supposer que la densité d'étoile par unité de surface,  $\sigma$ , est constante. On a alors :

$$n_D(D \pm dD/2) = 2\pi\sigma DdD \quad (10)$$

Si nous négligeons l'extinction interstellaire, nous trouvons cette fois

$$n_m(m \pm dm/2) = 40 \pi \sigma \ln 10 e^{-\frac{2 \ln 10}{5} M} \times e^{\frac{2 \ln 10}{5} m} dm \quad (11)$$

Autrement dit, la distribution des magnitudes apparentes est à chaque fois une loi en  $f_m(m) \propto e^{bm}$ ,  $b$  valant 1,38 dans le cas des étoiles proches, et 0,92 dans le cas d'étoiles lointaines. Par interpolation, on supposera que  $b$  prend des valeurs comprises entre ces deux limites pour des échantillons réels. En pratique, cette hypothèse correspond assez bien à la réalité, et elle est souvent utilisée pour déterminer la limite d'exhaustivité d'un catalogue.

### 3.3 Effet d'une sélection basée sur la magnitude apparente

Une sélection en magnitude peut biaiser gravement la distribution des rapports de masses d'un échantillon, ainsi que l'a remarqué Öpik (1924). Si un échantillon n'est pas défini par des critères astrométriques (parallaxe, ou, ce qui peut être équivalent, mouvement propre), il sera inmanquablement limité par la magnitude des étoiles, que ce critère soit imposé explicitement ou non. Dans ce cas, les étoiles doubles seront sélectionnées sur la base de leurs magnitudes composites. Si nous appelons  $m_1$  la magnitude primaire et  $\Delta m$  la différence entre les magnitudes secondaire et primaire, la magnitude composite d'un couple sera :

$$m_{1+2} = m_1 - 2,5 \log(1 + 10^{-\Delta m/2,5}) \quad (12)$$

Pour des étoiles de la séquence principale, on peut évaluer approximativement l'importance de la baisse de magnitude due à la composante secondaire en supposant que les deux composantes suivent une relation masse-luminosité de type :

$$M = -k_{\mathcal{M}} \log \mathcal{M} + C^{ste} \quad (13)$$

d'où on déduit :

$$\Delta m = -k_{\mathcal{M}} \log q \quad (14)$$

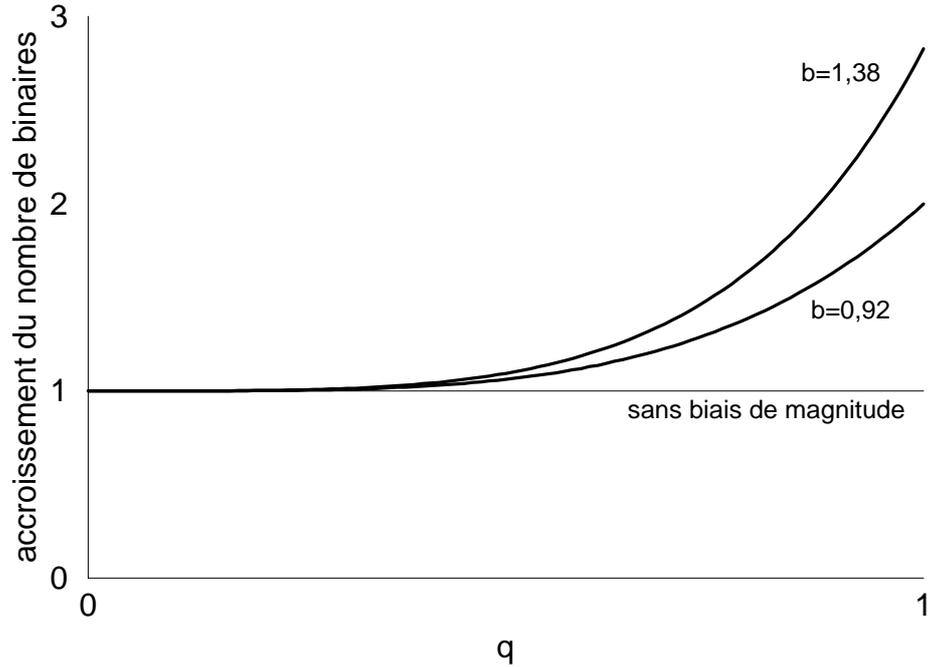


Figure 2.: *Accroissement du nombre de binaires dans un échantillon limité en magnitude, dans le cas de couples d'étoiles de la séquence principale, en appliquant la relation masse-luminosité donnée Equation 13 avec  $k_{\mathcal{M}} = 10$ . Les coefficients 1,38 et 0,92 correspondent à une distribution stellaire uniforme dans l'espace ou dans un plan.*

et

$$m_{1+2} = m_1 - 2,5 \log(1 + q^{k_{\mathcal{M}}/25}) \quad (15)$$

En reprenant la distribution des magnitudes vue à la section précédente, et en prenant la valeur moyenne  $k_{\mathcal{M}} = 10$ , on peut calculer l'accroissement du nombre de binaires dans un échantillon en fonction du rapport de masses. La Figure 2 montre les limites des coefficients d'accroissement en fonction du rapport de masses et de la distribution des étoiles.

On constate que le nombre de couples de rapports de masses supérieurs à 0,5 est significativement accru, allant jusqu'à doubler, voire augmenter d'un facteur 2,8, quand le rapport de masses vaut 1. Pour éviter que ce biais ne fausse les statistiques, il est recommandé de ne considérer que des échantillons strictement limités dans l'espace, ou de rejeter les couples dont la composante primaire est plus faible que la limite de sélection.

## 4. Exploitation statistique des binaires spectroscopiques

### 4.1 Distribution des rapports de masses des binaires à un spectre

Si le calcul du rapport de masses d'une binaire à deux spectres (BS2) est immédiat, les éléments orbitaux des binaires à un spectre (BS1) ne donnent que la fonction de masse,  $f_{\mathcal{M}}$ , qui dépend à la fois du rapport de masses, de la masse primaire, et de l'inclinaison (voir l'équation 19 de la présentation générale des étoiles doubles). Si nous déduisons la masse primaire du type spectral de l'étoile, nous pouvons diviser  $f_{\mathcal{M}}$  par  $\mathcal{M}_1$ , et nous obtenons la fonction de masse réduite :

$$Y = \frac{q^3 \sin^3 i}{(1+q)^2} \quad (16)$$

Le rapport de masses,  $q$ , est alors compris entre une valeur minimum qui correspond à  $\sin i = 1$ , et une valeur maximum qui correspond à la transition BS1–BS2. Le problème est maintenant de passer de la distribution des  $Y$  à la distribution des  $q$  de l'échantillon.

*La méthode directe de Campbell et Schlesinger* Il est tentant de se débarrasser du terme  $\sin^3 i$  de l'Equation 16 en le remplaçant par une valeur moyenne. Sachant que la distribution des inclinaisons est en  $\sin i$ , on trouve  $\langle \sin^3 i \rangle = 0,589$ , et il ne reste plus qu'à calculer le rapport de masses de chaque BS1. En fait, cette méthode est à proscrire absolument, son résultat étant inmanquablement une distribution de  $q$  décroissante qui s'étend bien au-delà du rapport de masses maximum (Halbwachs 1981, Mazeh & Goldberg 1992). La raison tient dans la distribution de  $\sin^3 i$  (Halbwachs 1987) ; en effet, la loi en  $\sin i$  nous donne :

$$f_{\sin^3 i}(x) = \frac{1}{3x^{1/3}\sqrt{1-x^{2/3}}} \quad (17)$$

Or, au lieu de figurer un pic centré sur la valeur moyenne, cette distribution présente deux maxima, l'un en 0 et l'autre en 1. La substitution de  $\sin^3 i$  par un terme unique est alors impossible.

*La simulation de Jaschek et Ferrer* Jaschek et Ferrer (1972) eurent l'idée d'employer la simulation pour calculer la distribution de  $Y$  en partant de distributions–hypothèses de  $q$ . Par tâtonnements, ils ont finalement trouvé une distribution de  $q$  qui produisait bien la distribution de  $Y$  observée. Cette méthode a l'avantage d'être exacte, mais elle est un peu fastidieuse et a l'inconvénient de ne pas déboucher sur une solution définitive : on peut indéfiniment compliquer la distribution de  $q$  pour améliorer l'ajustement.

*La méthode récurrente d'Abt et Levy* La première méthode directe exacte est due à Abt et Levy (1976). Elle consiste à traiter la distribution de  $Y$  en descendant des plus grandes valeurs vers les plus petites. Comme les plus grandes valeurs viennent à la fois de grandes inclinaisons et de grands rapports de masses, on évalue le nombre total de ces derniers ; on estime aussi la distribution de  $Y$  des binaires de grands rapports de masses mais d'inclinaisons plus faibles. Ces systèmes sont retirés de la distribution générale de  $Y$ , et on reprend le processus, sachant que les plus grandes valeurs de  $Y$  qui restent correspondent toujours à des inclinaisons proches de  $\pi/2$ .

En pratique, cette méthode a l'inconvénient d'accumuler les effets des fluctuations statistiques sur les petits rapports de masses. Pour cette raison, elle n'est plus utilisée aujourd'hui.

*La méthode itérative par l'algorithme de Richardson-Lucy* En 1991, Antoine Duquennoy calcula la loi de probabilité de  $q$  pour chaque BS1, et obtint la distribution des rapports de masses de son échantillon en sommant ces diverses lois de probabilité (Duquennoy & Mayor, 1991). Il ne réalisa que plus tard qu'il avait mis en oeuvre une méthode nouvelle, ou du moins son ébauche.

Pour calculer la loi de probabilité de  $q$  de chaque étoile, Duquennoy avait implicitement supposé que la distribution des rapports de masses de l'ensemble était la loi constante. Sa démarche aurait donc du se poursuivre, en reprenant le calcul à partir de la distribution de  $q$  qu'il avait trouvée, et ainsi de suite jusqu'à la convergence. Le principe d'une telle méthode inverse itérative était en fait déjà connu : il s'agit de l'"algorithme de Richardson-Lucy". Son application complète au cas des BS1 a finalement été réalisée simultanément par Boffin, Paulus & Cerf et par Mazeh & Goldberg (1992). Les premiers en ont donné une description très mathématique, alors que les seconds ont opté pour une présentation accessible à tous, dont nous nous inspirons ici.

Nous supposons connue la distribution des rapports de masses de l'ensemble des binaires de l'échantillon,  $f_q$ . Nous supposons aussi que la distribution globale des inclinaisons est la loi  $f_i = \sin i$ . Ceci est en fait une approximation, puisque les petites inclinaisons donnent des amplitudes de vitesse radiale indétectables ; cet effet n'est cependant pas très important, les petits  $\sin i$  étant peu probables. La probabilité qu'une BS1 de fonction de masse réduite  $Y \pm dY/2$  ait le rapport de masses  $q \pm dq/2$  dépend alors du produit de la probabilité qu'une BS ait le rapport de masses  $q \pm dq/2$  et de celle d'avoir en plus l'inclinaison  $i$  ad hoc :

$$\varphi_q(q) dq = \frac{f_q(q) dq \sin i(q; Y) di(dY; q)}{f_Y(Y) dY} \quad (18)$$

où  $i(q; Y)$  désigne l'inclinaison qui correspond au rapport de masses  $q$  pour  $Y$  fixée, alors que  $di(dY; q)$  est l'écart différentiel sur  $i$  qui correspond à la largeur de l'intervalle d'incertitude sur  $Y$  pour la valeur de  $q$  que l'on considère.  $f_Y(Y) dY$  est la probabilité pour qu'une étoile prise au hasard ait effectivement une fonction de masse réduite dans l'intervalle  $Y \pm dY/2$ ; ce terme n'est là que pour la normalisation de  $\varphi_q$ .

En calculant  $di(dY; q)$  par dérivation de l'équation 16, on obtient finalement :

$$\varphi_q(q) dq = \frac{f_q(q) \sin i(q; Y) \tan i(q; Y) dq}{3 Y f_Y(Y)} \quad (19)$$

Pour une étoile donnée,  $Y$  est une constante du problème. Par conséquent, comme  $\varphi_q$  peut être normée *a posteriori*, la valeur exacte de  $3 Y f_Y(Y)$  n'a aucune importance.

En intégrant  $\varphi_q(q)$  sur des intervalles de comptage, on détermine l'histogramme des probabilités des valeurs possibles de  $q$ . Normé à l'unité, puisqu'il s'applique à une BS1, cet histogramme est ajouté à l'histogramme général des binaires de l'échantillon. Une fois ce calcul effectué pour toutes les étoiles, l'histogramme général est lissé et transformé en une distribution normée qui donnera  $f_q(q)$  pour l'itération suivante.

Il est à noter que le calcul présenté ici diffère légèrement de celui de Mazeh et Goldberg. En effet, plutôt que d'ajuster  $di$  en fonction de  $q$  et de  $dY$ , ces derniers avaient pris en compte  $dY$  dans  $dq$ , ce qui rend le calcul plus compliqué et plus coûteux en temps machine, puisqu'ils passent par une simulation au lieu d'intégrer pas à pas.

#### 4.2 Effets de sélection des binaires spectroscopiques

En plus d'un éventuel biais venant de la magnitude apparente (voir section 3.3), les binaires spectroscopiques ont leurs effets de sélection spécifiques. Il faut tenir compte de la capacité à détecter la variabilité de la vitesse radiale, mais aussi de celle à déterminer l'orbite. Ceci dépend, d'une part, des paramètres de l'orbite spectroscopique, et, d'autre part, de la précision des mesures de  $V_r$ , de l'algorithme de sélection des étoiles variables, et du calendrier des mesures. Ainsi, les binaires de périodes proches de l'année sont moins facilement détectées que les autres (voir la Figure 4 de Duquennoy & Mayor 1991).

La prise en compte des effets de sélection est plus simple pour les BS2 que pour les BS1. Dans le premier cas, Mazeh et Goldberg calculent, pour chaque étoile, la probabilité de détecter les systèmes de même période et de même rapport de masses. Pour ce faire, ils font varier les autres paramètres orbitaux, à tout le moins l'inclinaison; ce calcul peut être analytique dans les cas les plus simples, mais il passera par la simulation

si le processus pris en compte est complexe. Ils affectent ensuite à l'étoile un poids égal à l'inverse de cette probabilité de détection.

Pour les BS1, Mazeh et Goldberg préconisent de produire, pour chaque binaire observée, des binaires virtuelles de mêmes paramètres observationnels, et de rapports de masses suivant la distribution  $\varphi_q$  donnée Equation 19. Ils calculent ensuite, pour chaque binaire virtuelle, la probabilité de détecter les systèmes de mêmes période, rapport de masses, et masse primaire, comme ils l'ont fait pour les BS2. En affectant aux binaires virtuelles des facteurs de correction, ils construisent une distribution  $\varphi_q$  corrigée des effets de sélection, et dont la norme est la valeur moyenne des facteurs de correction. Le cumul de ces distributions, joint aux BS2 pondérées, donne l'histogramme des rapports de masses de toutes les binaires de l'échantillon observé, y compris celles qui n'ont pas été détectées.

Il est évident que la distribution ainsi obtenue ne s'applique qu'aux rapports de masses supérieurs au rapport de masse minimum correspondant à la plus petite valeur de  $Y$  trouvée dans l'échantillon. De plus, en raison des grands facteurs de correction qu'on y trouve, le domaine des petits rapports de masses est affecté d'incertitudes importantes.

En calculant le facteur de correction moyen de chaque binaire, cette technique permet aussi de corriger la distribution des périodes.

### 4.3 Propriétés statistiques déduites des BS

*Distribution des rapports de masses* Les étoiles de la séquence principale les mieux observées en vitesse radiale sont celles de type spectral proche de celui du soleil, qu'il s'agisse d'étoiles du voisinage solaire (Duquennoy & Mayor 1991, Halbwachs et al. 2000b), ou d'étoiles appartenant à des amas ouverts (Mermilliod et al. 1992, Mermilliod & Mayor 1999). Les BS1 de ces deux classes d'étoiles présentent l'avantage d'avoir leurs rapports de masses contraints par des mesures astrométriques, ou par leurs positions sur une séquence photométrique. La Figure 3 montre la distribution obtenue en cumulant ces deux échantillons (Halbwachs et al., 2000c).

On constate que la distribution des rapports de masses reste très imprécise, les écarts à la loi constante étant à la limite du seuil de signification. Ainsi, il est probable qu'il existe une concentration autour du rapport de masses  $q = 1$ , et il semble bien que la fréquence soit réellement très petite pour les masses secondaires proches de la transition entre étoiles et naines brunes (Halbwachs et al. 2000a). Ces caractéristiques devront toutefois être confirmées par des échantillons plus grands pour devenir certaines.

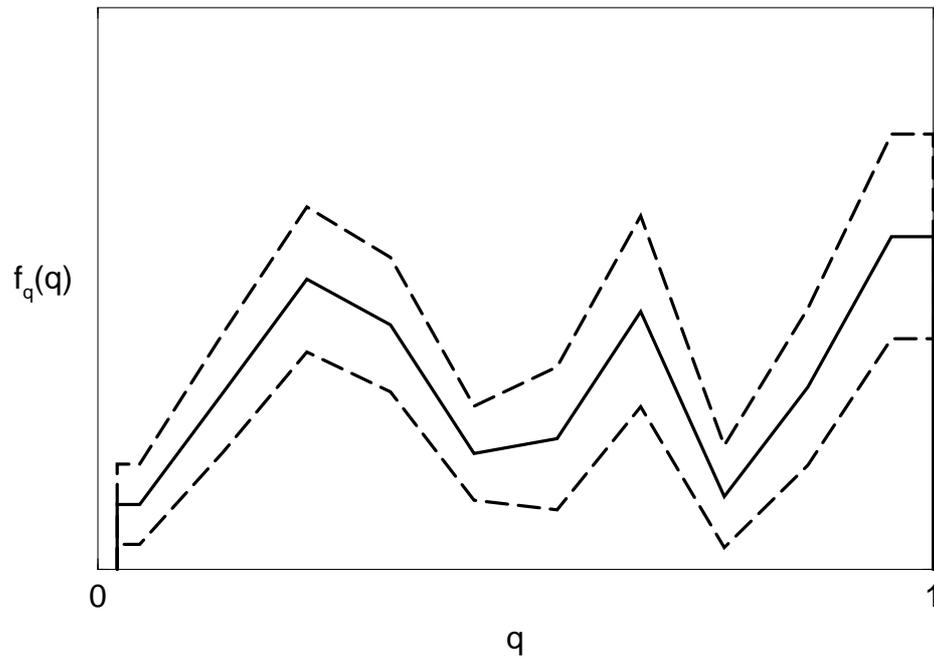


Figure 3.: *Distribution des rapports de masses des binaires de la séquence principale de périodes inférieures à 10 ans. Les tirets délimitent l'intervalle d'incertitude, défini à un  $\sigma$ . L'échantillon de départ est constitué de binaires spectroscopiques de type F7 à K8, observées au voisinage du Soleil ou dans des amas ouverts. Les planètes sont en-dehors du domaine de rapport de masses exploré.*

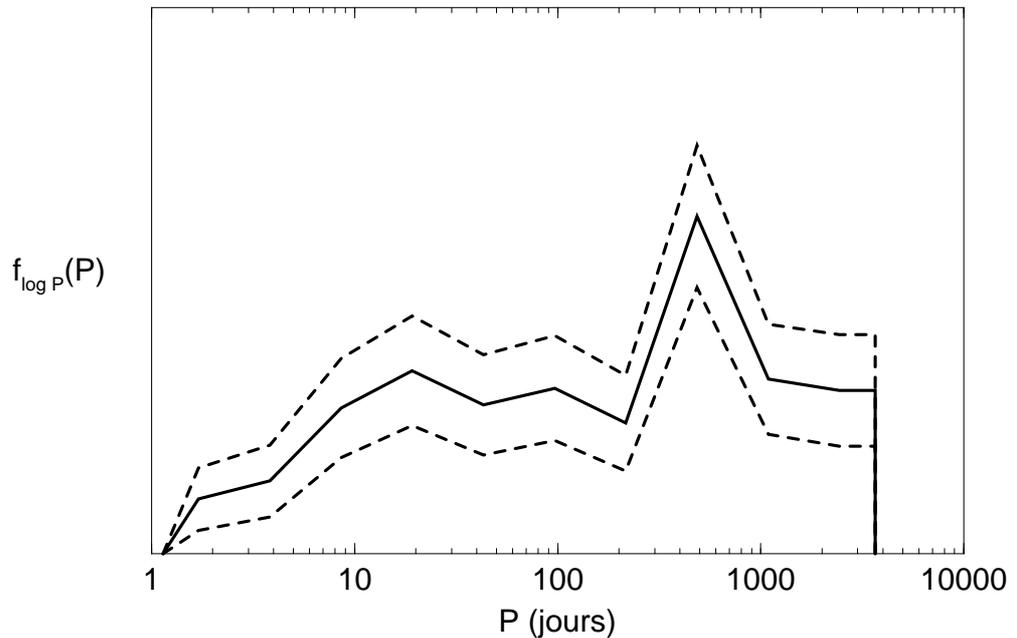


Figure 4.: *Distribution des périodes. L'échantillon de départ est le même que Figure 3.*

*Distribution des périodes* Reprenant les mêmes étoiles qu'à la section précédente, nous trouvons la distribution des périodes représentée Figure 4. On voit que la distribution de  $\log P$  est croissante jusqu'à une vingtaine de jours, avant d'être à peu près constante.

*Relation entre les périodes et les excentricités* La distribution des binaires dans le plan  $\log P - e$  (Figure 5) fait apparaître que la grande majorité des systèmes de périodes inférieures à une dizaine de jours ont des orbites circulaires, alors que les orbites sont presque systématiquement excentriques au-delà de cette limite. De façon générale, l'excentricité moyenne augmente avec la période.

L'absence d'orbite excentrique parmi les courtes périodes s'explique par la circularisation des orbites par effet de marée (Lecar et al. 1976, Zahn 1977). La durée de ce processus de circularisation dépend de la période, ce qui fait de la transition entre orbites circulaires et orbites excentriques un moyen d'estimer l'âge d'un amas ou d'une population d'étoiles (Mayor & Mermilliod 1984, Mathieu & Mazeh 1988). Dans ce schéma, les rares binaires de longues périodes et de petites excentricités sont interprétées comme ayant une composante secondaire devenue naine blanche, la circularisation s'étant faite lors de son stade géante.

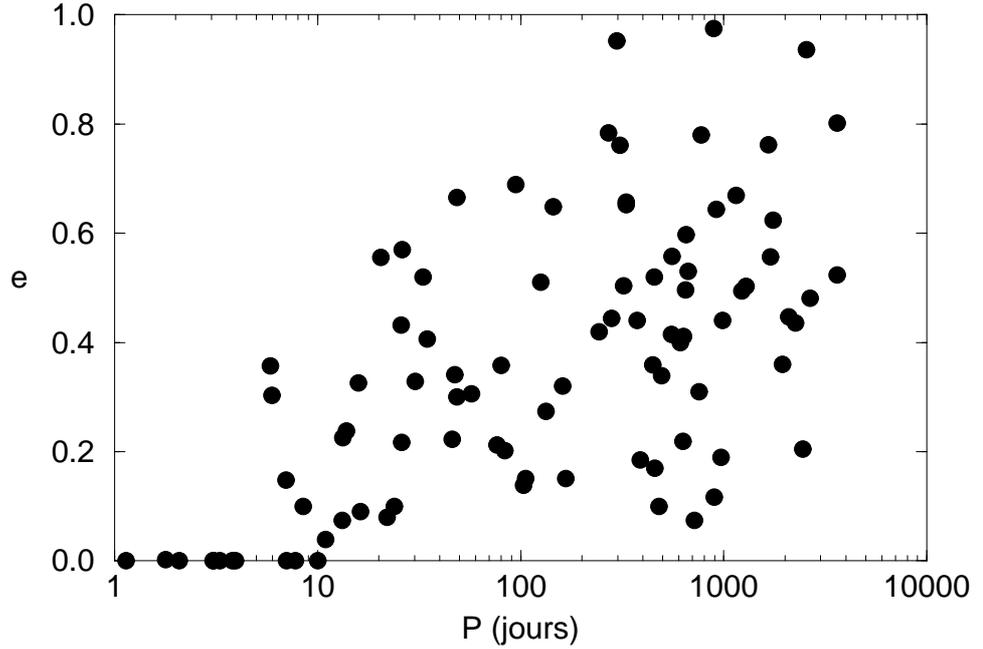


Figure 5.: Relation période–excentricité des binaires spectroscopiques de l'échantillon de la Figure 3.

## 5. Exploitation statistique des binaires visuelles

### 5.1 Paramètres étudiés

*Pour le rapport de masses* Le rapport de masses d'une binaire visuelle ne peut être déterminé dynamiquement, mais nous pouvons l'estimer grâce à la relation masse–luminosité (Equation 14). Si le type spectral de la composante primaire est connu, on préférera une calibration plus précise, toujours en utilisant la différence de magnitude  $\Delta m$ .

*Pour la période* Les binaires visuelles d'orbite connue constituant une infime minorité, on traitera ici des binaires visuelles prises au sens large. Dans ce cas, on ignore la période des systèmes, ainsi que leur demi-grand axe. Cependant, ce dernier paramètre est statistiquement lié à la séparation. Reprenant les équations 9 et 11 de la présentation générale des binaires, nous voyons que la séparation apparente est :

$$\rho = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \sqrt{1 - \sin^2(\nu + \omega) \sin^2 i} \quad (20)$$

Pour  $a$  et  $e$  donnés, van Albada (1968) a calculé que la distribution en  $\sin i$  des inclinaisons et les distributions constantes des  $\omega$  et des anomalies moyennes font que :

$$\langle \log \rho \rangle = \log a + \log(1 + \sqrt{1 - e^2}) - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\ln 10} \quad (21)$$

L'écart entre  $\log a$  et  $\langle \log \rho \rangle$  sera donc compris entre 0,133 si  $e = 0$  et 0 si  $e = 1$ . On sait que, pour les binaires visuelles d'orbite connue, les excentricités suivent la distribution :

$$f_e(e) \propto \sqrt{e - e^2} \quad (22)$$

proposée par Heintz (1978). Par ailleurs, utilisant les binaires visuelles d'orbite connue en son temps, Couteau (1960) avait trouvé la relation :

$$\left\langle \frac{\rho}{a} \right\rangle = 0,858 \pm 0,017 \quad (23)$$

Pour finir, si nous introduisons encore les distances, la similitude entre la distribution des logarithmes des séparations projetées sur la voûte céleste,  $s = D \times \rho$  et la distribution des logarithmes des demi-grands axes se vérifie facilement par simulation (Halbwachs 1983). Ces derniers étant équivalents à  $\log P$ , nous étudierons la distribution de  $\log P$  par le truchement de celle de  $\log s$ .

## 5.2 Effets de sélection affectant les binaires visuelles

Une fois de plus, notre problème sera de passer des distributions observées sur un échantillon de binaires aux distributions intrinsèques qui caractérisent une population d'étoiles doubles, en l'absence d'effet de sélection.

La détectabilité d'une binaire visuelle dépend de trois paramètres, qui interviennent séparément mais aussi en se croisant. Il s'agit de la magnitude primaire,  $m_1$ , de la différence de magnitude,  $\Delta m$ , et de la séparation apparente,  $\rho$  (Halbwachs 1983). Les principaux effets viennent des couples  $(m_1, \Delta m)$  et  $(\rho, \Delta m)$ . Le premier de ces couples traduit surtout la limitation de la prospection en magnitude secondaire,  $m_2 = m_1 + \Delta m$ , tout en la faisant dépendre de la magnitude composite du couple,  $m_{1+2}$  (voir Equation 12). Le deuxième traduit le lien très fort entre le pouvoir séparateur et la différence de magnitude (voir, par exemple, Lindegren 1997).

La première étape de toute étude statistique sera de déterminer les conditions sous lesquelles la détection des binaires est complète. Cela se fait en supposant que, en l'absence de biais, la distribution de  $\Delta m$  ne doit pas dépendre de  $m_1$  ou de  $\rho$ . Mieux vaudra, ensuite, rejeter les binaires trouvées au-delà des limites d'exhaustivité de l'échantillon.

Après ce filtrage, le passage des distributions observées aux distributions intrinsèques peut se faire par simulation, mais il est plus pratique de le traiter par les méthodes directes présentées ci-dessous.

### 5.3 Distribution des rapports de masses par la méthode des échantillons emboîtés

Cette méthode (Halbwachs 1983, Halbwachs et al. 1997, Piquard 1997) s'applique à tout échantillon de binaires visuelles de la séquence principale, pourvu que l'on connaisse, pour tout jeu  $(m_1, \rho)$ , la valeur limite de  $\Delta m$  jusqu'à laquelle la sélection est complète. Le passage de  $\Delta m$  à  $q$  peut aussi bien se faire par une relation moyenne que par une calibration plus précise, pourvu que, pour chaque étoile, un  $\Delta m$  plus grand implique nécessairement un  $q$  plus petit.

Des conditions strictes en  $(m_1, \rho)$  permettent d'extraire un sous-échantillon non biaisé jusqu'à une petite valeur de  $q$ ; malheureusement, ce sous-échantillon comprendra peu d'étoiles. Inversement, des conditions moins draconiennes en  $(m_1, \rho)$  définiront un sous-échantillon qui sera plus riche en étoiles de grands rapports de masses, donc plus adapté, tant qu'on considèrera des valeurs de  $q$  suffisamment grandes. Le principe de la méthode des échantillons emboîtés est de raccorder les distributions issues de ces deux sous-échantillons, sur la base de leur partie commune. Sa mise en application se fait comme suit :

1. Rejeter de l'échantillon les binaires hors des limites de détection complète.
2. Pour chaque binaire restant dans l'échantillon, déduire de  $m_1$  et de  $\rho$  la valeur limite de  $\Delta m$ ,  $\Delta m_{lim}$  qui aurait encore permis son maintien dans l'échantillon.
3. Calculer, pour chaque binaire, son rapport de masses et le rapport de masses limite,  $q_{lim}$ , qui correspond à  $\Delta m_{lim}$ .
4. Construire l'histogramme des rapports de masses en descendant depuis  $q = 1$ . On comptabilise, pour chaque intervalle  $[q_i, q_{i+1}[$  (avec  $q_{i+1} < q_i$ ),
  - les  $n_i$  binaires de  $q \in [q_i, q_{i+1}[$  et de  $q_{lim} \leq q_{i+1}$  ;
  - les  $s_i$  binaires de  $q > q_i$  tout en ayant  $q_{lim} \leq q_{i+1}$  ;

Si  $S_i$  est l'effectif des binaires de  $q > q_i$  corrigé des effets de sélection, alors, l'histogramme corrigé contient  $n_i \times S_i / s_i$  binaires dans l'intervalle  $[q_i, q_{i+1}[$ .

Bien entendu, cette méthode peut aussi s'employer pour calculer la distribution de  $\Delta m$  au lieu de celle de  $q$ ; le calcul n'en est que plus facile.

On obtient ainsi une distribution des rapports de masses comme celle de la Figure 6. La comparaison entre les distributions observée et corrigée permet d’apprécier l’importance des effets de sélection.

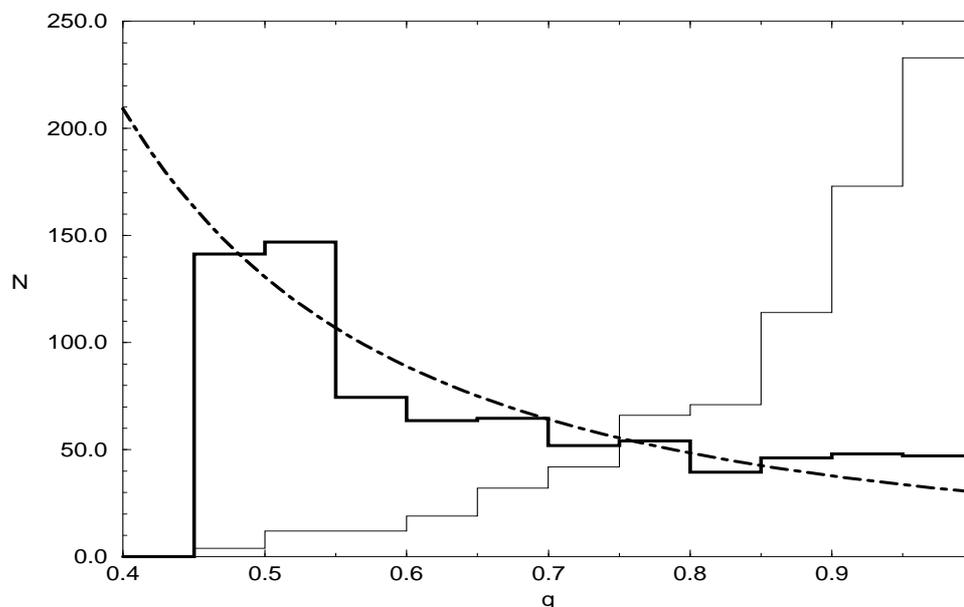


Figure 6.: *Distribution des rapports de masses des binaires de la séquence principale, déduite des binaires visuelles. Le trait fin donne la distribution des rapports de masses dans l’échantillon observé, et le trait épais la distribution corrigée des effets de sélection par la méthode des échantillons emboîtés. La ligne discontinue représente une loi de puissance de type  $f_q(q) \propto q^{-2.11}$ . Figure communiquée par Sandrine Piquard.*

A la différence des binaires de période inférieure à 10 jours, les couples à grandes séparations ont des rapports de masses qui semblent refléter la distribution initiale des masses des étoiles.

#### 5.4 Distribution des séparations par la méthode des compensations

Notre objectif est maintenant de corriger la distribution des séparations projetées sur la voûte céleste,  $s$ . Cette distribution est affectée de deux biais différents : la détectabilité, qui dépend de  $\rho$ , et les distances des étoiles. Il est pourtant possible de remonter directement de la distribution observée à la distribution intrinsèque, en déterminant la proportion de binaires qui ont été détectées pour chaque valeur de

$s$  (Delmotte 2000). Pour cela, il faut disposer d'un échantillon témoin, représentatif de la population d'étoiles qui a été observée pour découvrir les binaires visuelles que l'on traite. Il faut bien sur connaître les effets de sélection, mais, en plus, il faut disposer de la distribution intrinsèque des  $\Delta m$  ou des rapports de masses quand ceux-ci sont liés à  $\Delta m$ . Ces conditions une fois remplies, on procède comme suit :

1. Rejeter de l'échantillon les binaires hors des limites de détection complète.
2. A partir des séparations apparentes et des distances, calculer la distribution des séparations observées,  $f_s^{observée}$  (Figure 7).

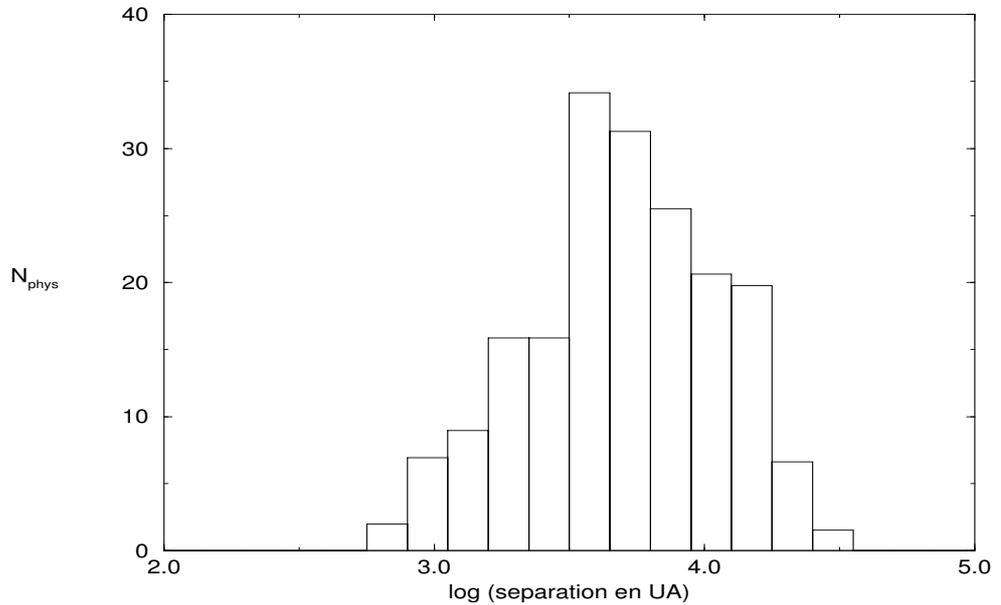


Figure 7.: *Exemple de distribution des séparations d'un échantillon d'étoiles doubles de grandes séparations apparentes.*

3. Calculer pas à pas la détectabilité des binaires en fonction de  $s$ ,  $p_{dét}(s)$ , à partir des étoiles de l'échantillon témoin :
  - Pour chaque étoile de l'échantillon témoin, déduire de la magnitude primaire le domaine de  $\rho$  et de  $\Delta m$  correspondant à une complète détection.
  - Faisant varier  $\rho$  pas à pas dans le domaine de détection, calculer la séparation  $s = D \times \rho$ , calculer la valeur limite de

détection  $\Delta m_{lim}(s; m_1, D)$ , et en déduire la limite  $q_{lim}(s)$ . La détectabilité associée à la  $i^e$  étoile est alors :

$$p_{dét}^{(i)}(s) = \int_{q_{lim}(s)}^1 f_q(q) dq \quad (24)$$

(si on connaît  $f_{\Delta m}$  au lieu de  $f_q$ , on intégrera ici  $f_{\Delta m}$  de 0 à  $\Delta m_{lim}(s)$ ).

- Il n'y a plus qu'à cumuler les détectabilités de toutes les étoiles, et à calculer la moyenne

$$p_{dét}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{témoin}} p_{dét}^{(i)}(s)}{N_{témoin}} \quad (25)$$

ou  $N_{témoin}$  est le nombre d'étoiles de l'échantillon témoin.  $p_{dét}(s)$  est la *détectabilité* des étoiles doubles présentes dans l'échantillon témoin (Figure 8).

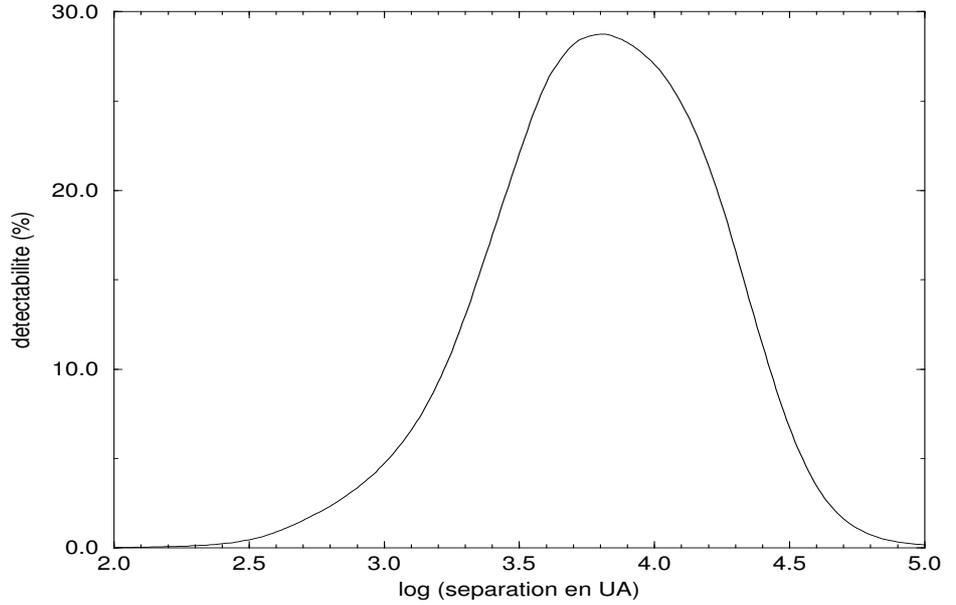


Figure 8.: *Efficacité de la détection des étoiles doubles en fonction de la séparation, pour l'échantillon d'où ont été extraits les couples de la Figure 7.*

4. La distribution corrigée de  $s$  est alors le rapport entre la distribution observée et la détectabilité :

$$f_s^{\text{intrinsèque}}(s) = f_s^{\text{observée}}(s)/p_{\text{dét}}(s) \quad (26)$$

La Figure 9 donne un exemple du résultat de ces opérations.

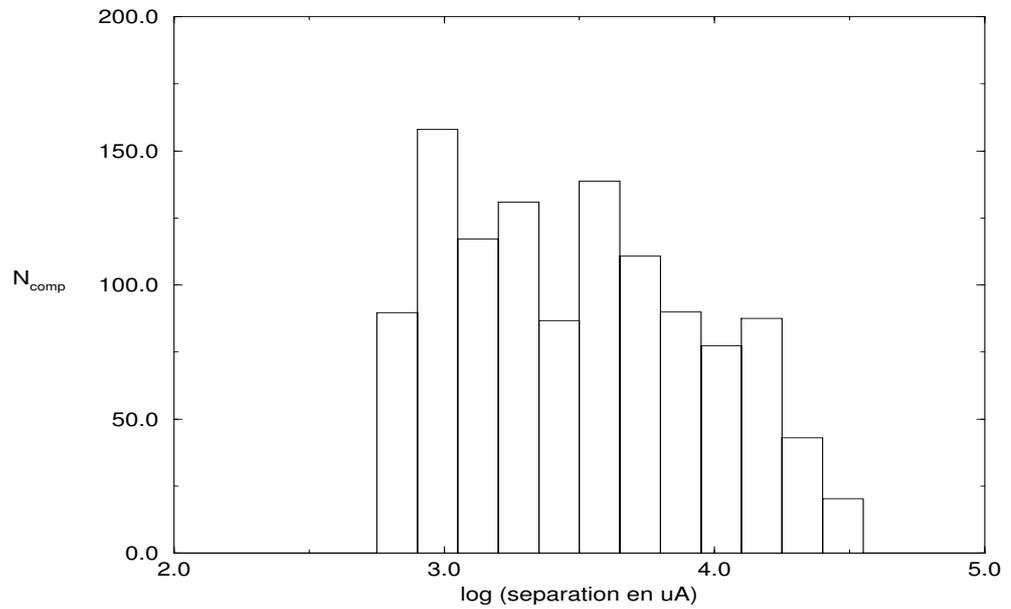


Figure 9.: *Distribution des séparations des étoiles doubles effectivement présentes dans l'échantillon de départ, après compensation des non-détections. Les Figures 7 à 9 ont été communiquées par Nausicaa Delmotte.*

La distribution des séparations des binaires visuelles s'étend sur un très grand domaine, de quelques UA à quelques dizaines de milliers d'UA, si on inclut les couples à mouvements propres communs. Les distributions trouvées se départagent en deux familles : les distributions de  $\log s$  proches de la constante (de Öpik 1924 à Allen et al. 2000) et celles aux allures de courbe en cloche (de Kuiper 1935 à Duquennoy & Mayor 1991). Le débat est toujours ouvert ...

## 6. Conclusion : quelques questions en suspens

Nous avons vu quelques techniques qui permettent de déterminer les distributions des rapports de masses et des périodes (ou des séparations) des binaires dans l'espace, en corrigeant les effets de sélection propres aux binaires spectroscopiques et aux binaires visuelles. Ces distributions restent cependant mal connues, essentiellement en raison de la faiblesse numérique des échantillons homogènes. Les questions cruciales pour l'étude de la formation des étoiles doubles sont toujours :

- La distribution des rapports de masses est-elle le produit du processus de formation des composantes, ou peut-elle s'interpréter comme venant d'un appariement aléatoire ?
- Si un processus spécifique semble intervenir pour les binaires serrées, jusqu'à quelle séparation est-il efficace ? Comment concilier cela avec une distribution unique de  $\log s$  ?

Nous espérons que les approches exposées ici permettront bientôt de répondre à ces interrogations.

## Références

- [1] Abt H.A., Levy S.G., 1976, ApJS 30, 273
- [2] Allen C., Poveda A., Herrera M.A., 2000, A&A 356, 529
- [3] Boffin H.M.J., Paulus G., Cerf N., 1992, dans "Binaries as Tracers of Stellar Evolution", éd. A. Duquennoy & M. Mayor, p. 26, Cambridge Univ. Press
- [4] Delmotte N., 2000, Stage de DEA, Observatoire de Strasbourg, Univ. Strasbourg I
- [5] Duquennoy A., Mayor M., 1991, A&A 248, 485
- [6] Couteau P., 1960, Journal des Observateurs, 43, 41
- [7] Halbwachs J.L., 1981, Thèse de troisième cycle, Univ. Strasbourg I
- [8] Halbwachs J.L., 1983, A&A 128, 399
- [9] Halbwachs J.L., 1987, A&A 183, 234
- [10] Halbwachs J.L., Piquard S., Virelizier P., Cuypers J., Lampens P., Oblak E., 1997, ESA-SP402, p. 263
- [11] Halbwachs J.L., Arenou F., Mayor M., Udry S., Queloz D., 2000a, A&A 355, 581
- [12] Halbwachs J.L., Arenou F., Mayor M., Udry S., 2000b, dans "Poster Proceedings of IAU Symposium 2000", éd. Bo Reipurth & H. Zinnecker, Astrophys. Inst. Potsdam, p. 132
- [13] Halbwachs J.L., Arenou F., Mayor M., Udry S., 2000c, A&A, en préparation

- [14] Heintz W.D., 1978, “Double stars”, Reidel
- [15] Jaschek C., Ferrer O., 1972, *PASP* 84, 292
- [16] Kuiper G.P., 1935 *PASP* 47, 121
- [17] Lecar M., Wheeler J.C., McKee C.F., 1976 *ApJ* 205, 556
- [18] Lindegren L., 1997, ESA-SP402, p. 13
- [19] Mathieu R.D., Mazeh T., 1988, *ApJ* 326, 256
- [20] Mayor M., Mermilliod J.C., 1984, *IAU Symp.* 105, éd. Maeder & Renzini, Reidel, p. 411
- [21] Mazeh T., Goldberg D., 1992, dans “Binaries as Tracers of Stellar Evolution”, éd. A. Duquennoy & M. Mayor, Cambridge Univ. Press, p. 170
- [22] Mermilliod J.C., Rosvick J.M., Duquennoy A., Mayor M., 1992, *A&A* 265, 513
- [23] Mermilliod J.C., Mayor M., 1999, *A&A* 352, 479
- [24] Öpik E.J., 1924, *Publ. de l’Obs. Astron. de l’Univ. de Tartu*, tome XXV, N. 6
- [25] Piquard S., 1997, Stage de DEA, Observatoire de Strasbourg, Univ. Strasbourg I
- [26] Saporta G., 1990, “Probabilités, analyse des données et statistique”, éd. Technip
- [27] van Albada T.S., 1968, *Bull. Astr. Inst. Netherlands* 20, 47
- [28] Zahn J.P., 1977, *A&A* 57, 383 + errata *A&A* 67, 162