

Géométrie de Roche

Jean-Marie Hameury

Observatoire de Strasbourg

Abstract.

I discuss here the geometry of a close binary, described by the Roche potential. The three possible solutions, detached, semi-detached and contact systems, are presented. Ellipsoidal variations found in quiescent soft X-ray transients show that the secondary distortion is indeed quite detectable; they also can be used to constrain the primary mass, and, together with the spectroscopic determination of the mass function, are the only unambiguous evidences for the existence of black holes in LMXBs.

Ce chapitre détaille la géométrie d'un système binaire serré, décrite par le potentiel de Roche. Les trois possibilités (système détaché, semi-détaché, en contact) sont présentées. Les variations ellipsoïdales observées dans les systèmes transitoires X en quiescence montrent que les déformations de la secondaire sont parfaitement détectables ; elles permettent surtout de contraindre la masse de l'objet compact, et fournissent, avec la détermination par spectroscopie de la fonction de masse, les seules preuves indiscutables de l'existence de trous noirs dans les systèmes binaires X.

1. Potentiel de Roche

1.1 *Mouvement dans le système binaire*

On supposera que les deux étoiles sont ponctuelles, et de masses M_1 et M_2 , situées aux points r_1 et r_2 . On considère que l'orbite est circulaire, ce qui est une excellente approximation, puisque les forces de marées circularisent très rapidement le mouvement. La séparation orbitale est donnée par la loi de Kepler :

$$a = 3.53 \cdot 10^{10} \left(\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} \right)^{1/3} P_{\text{hr}}^{2/3} \text{ cm} \quad (1)$$

où P_{hr} est la période orbitale mesurée en heures. Si on se place dans le repère en corotation avec le système binaire, l'équation de conservation

de la quantité de mouvement d'un gaz s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla\Phi - 2\omega \times v - \frac{1}{\rho}\nabla P \quad (2)$$

où v est la vitesse du gaz, ρ sa densité, et P la pression. ω est la vitesse angulaire du système,

$$\omega = \left[\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \right]^{1/2} \quad (3)$$

et Φ est la somme du potentiel gravitationnel dû aux deux masses, et du potentiel centrifuge :

$$\Phi = -\frac{GM_1}{|r - r_1|} - \frac{GM_2}{|r - r_2|} - \frac{1}{2}|\omega \times r|^2 \quad (4)$$

A l'équilibre, la vitesse est nulle, et l'équation de conservation de la quantité de mouvement se ramène à :

$$\nabla\Phi = -\frac{1}{\rho}\nabla P \quad (5)$$

Ce qui signifie que la pression est constante sur les équipotentielles. Comme la température du gaz est donnée par une équation de transfert qui de façon générale dit que le gradient de température et le gradient de pression sont colinéaires, alors la température est aussi constante sur les équipotentielles. Enfin, la densité, la température et la pression étant liées par une équation d'état, la densité est également constante sur une équipotentielle. Ces propriétés sont bien sûr très générales ; on les connaît bien dans le cas des étoiles isolées, et il importe de réaliser qu'elles sont également vraies pour des systèmes doubles.

1.2 Equipotentielles

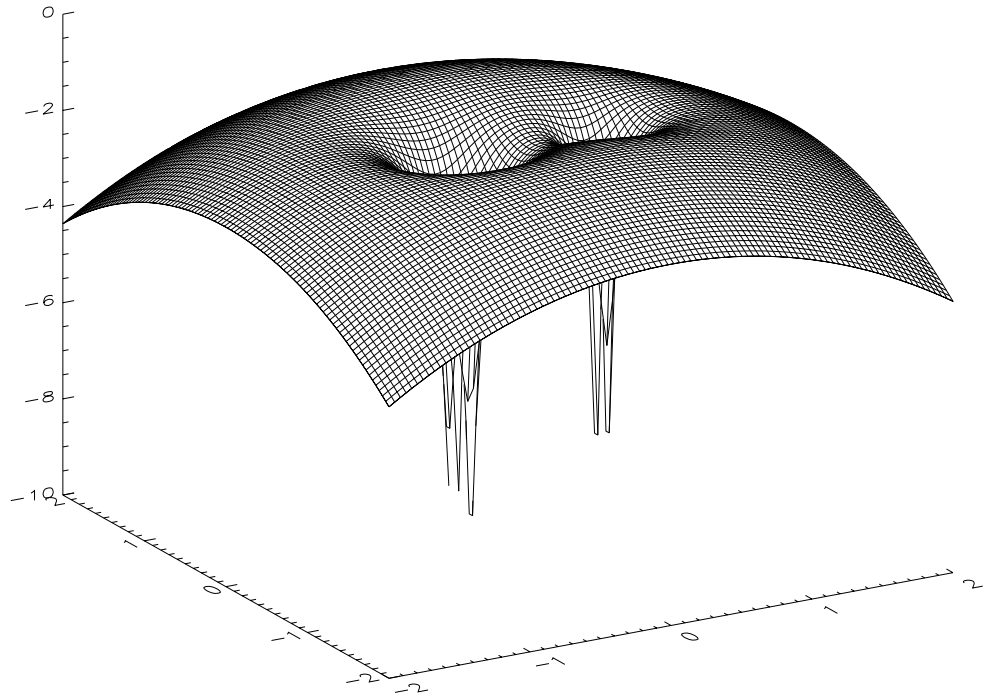
On choisit ici un repère ayant pour origine le centre de masse du système, l'axe z étant perpendiculaire au plan de l'orbite et les deux masses étant situées sur l'axe des x , aux positions $x_1 = -1/(1+q)$ et $x_2 = q/(1+q)$, où $q = M_1/M_2$, les distances étant normalisées par la séparation orbitale. Dans ce repère, et avec cette normalisation, Φ peut s'écrire :

$$\Phi = -\frac{q}{1+q} \frac{1}{d_1} - \frac{1}{1+q} \frac{1}{d_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (6)$$

où d_1 et d_2 sont définis par

$$d1 = [(x - x_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \quad (7)$$

$$d2 = [(x - x_2)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \quad (8)$$

Figure 1.: *Potentiel de Roche.*

et où on a normalisé Φ par $G(M_1 + M_2)/a$. La figure 1 montre l'allure du potentiel dans le plan orbital. On voit clairement le puit de potentiel de chaque étoile, ainsi que, à grande distance, le potentiel dû à la force centrifuge qui forme un paraboloidé. Les courbes de niveau correspondant à cette surface sont montrées figure 2. On voit que le potentiel présente plusieurs points où le gradient du potentiel est nul : ceux-ci peuvent être des extrémums ou des points selle, où les équipotentielles se croisent.

Ces extrémums, appelés points de Lagrange, sont donnés par la condition $\nabla\Phi = 0$, qui peut s'écrire :

$$\frac{q}{1+q} \frac{x-x_1}{d_1} + \frac{1}{1+q} \frac{x-x_2}{d_2} - x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{q}{1+q} \frac{y}{d_1} + \frac{1}{1+q} \frac{y}{d_2} - y = 0 \quad (10)$$

$$\frac{q}{1+q} \frac{z}{d_1} + \frac{1}{1+q} \frac{z}{d_2} = 0 \quad (11)$$

L'équation (11) implique $z = 0$, ce qui signifie que les points de Lagrange sont situés dans le plan orbital. L'équation (10) admet une solution $y = 0$,

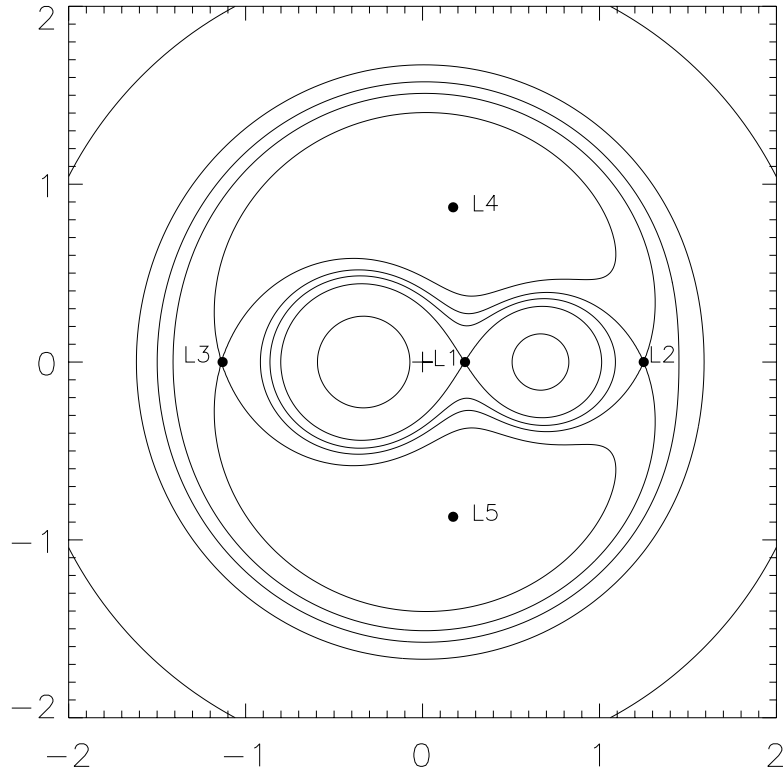


Figure 2.: *Equipotentiels de Roche. Le centre de masse est indiqué par une croix ; les équipotentiels passant par les 5 points de Lagrange (numérotés par énergie croissante) ont été tracés. Pour chaque valeur de l'énergie, on trouve deux ou trois équipotentiels distinctes : une à l'extérieur du système binaire, et une ou deux autres au voisinage immédiat du système.*

auquel cas l'équation (9) se simplifie en :

$$\frac{q}{1+q} \frac{1}{|x-x_1|} + \frac{1}{1+q} \frac{1}{|x-x_2|} - x = 0 \quad (12)$$

qui admet trois solutions : l'une inférieure à x_1 (point L_3), l'autre entre x_1 et x_2 (point L_1), et la dernière supérieure à x_2 (point L_2).

On peut montrer, et c'est clair sur les figures 1 et 2 que $\partial^2\Phi/\partial x^2 < 0$ et $\partial^2\Phi/\partial y^2 > 0$ pour ces trois points, qui sont des points selle. Ce sont des points d'équilibre instable.

L'équation (10) admet également deux solutions $y \neq 0$; ce sont les points de Lagrange L_4 et L_5 . Ces points sont des extréma du potentiel, et devraient normalement être instables ; On peut cependant montrer

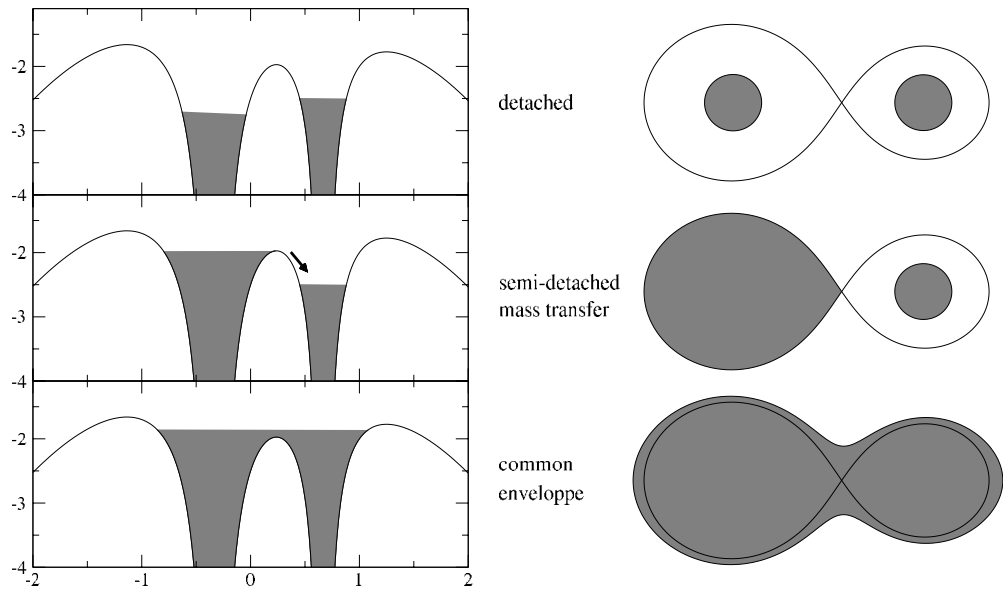


Figure 3.: *A gauche : variations du potentiel de Roche le long de l'axe des x . Trois cas sont représentés : en haut, deux étoiles bien séparées ; au milieu, l'une des étoiles a atteint le point de Lagrange L_1 ; il y a alors transfert de masse ; enfin, en bas, il y a formation d'une enveloppe commune. A droite, on a représenté les équipotentiels dans le plan orbital ; ces équipotentiels limitent la surface des étoiles.*

par une analyse linéaire, en développant le potentiel autour de sa valeur minimum, que les forces de Coriolis les rendent stables. C'est ainsi qu'on explique la position des astéroïdes troyens, qui sont aux points de Lagrange L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter.

1.3 Des systèmes détachés aux systèmes en contact

Les surfaces équipotentiels définissant la surface des étoiles, trois cas peuvent se présenter, comme le montre la figure 3. Les étoiles peuvent être chacune à l'intérieur d'une équipotentielle ; on a alors affaire à un système *détaché*, les déformations dues à la binarité étant limitées. Si maintenant le rayon de l'une des étoiles croît, il arrivera un moment où elle va atteindre le point de Lagrange L_1 . L'expansion de l'étoile se traduit maintenant par un transfert de masse, l'étoile restant à l'intérieur de l'équipotentielle passant par le point L_1 . On a alors affaire à un système *semi-détaché* ; les binaires telles que les Algols, les variables cataclysmiques et les binaires X de faible masse sont des exemples de tels systèmes. Enfin, si on poursuit le transfert de masse et que l'étoile de droite augmente de volume à son tour, cette dernière pourra remplir elle

aussi son lobe de Roche ; on a alors affaire à une binaire *en contact*, avec formation d'une enveloppe commune lorsque l'expansion se poursuit. Ultimement, il pourrait y avoir perte de masse du système par le point de Lagrange L_2 .

Certains systèmes montrent des indications de perte de masse par le point L_3 ; il s'agit de systèmes magnétiques tels que EX Hya, qui est une variable cataclysmique magnétique non synchrone dans laquelle la naine blanche tourne si vite qu'une fraction notable du flot d'accrétion est éjectée lors de l'interaction avec le champ magnétique de la naine blanche.

1.4 Quelques approximations utiles

La position du point de Lagrange L_1 est donnée par la relation approximative suivante (Plavec & Kratochvil, 1964) :

$$x_{L_1} - x_1 = 0.5 - 0.227 \log \frac{M_2}{M_1} \quad (13)$$

L'introduction de la géométrie de Roche dans les modèles de structure interne des étoiles amène des corrections relativement faibles aux modèles calculés en géométrie sphérique. Pour cette raison, mais bien sûr aussi par souci de simplicité, on suppose que l'étoile qui remplit son lobe de Roche dans une binaire semi-détachée peut être remplacée par une étoile sphérique qui occuperait le même volume. Le rayon de cette étoile ne dépend alors que de la géométrie du système, et est donné approximativement par (Paczynski 1971) :

$$\frac{R_2}{a} = 0.462 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^{1/3} \quad (14)$$

lorsque le rapport des masses M_2/M_1 est inférieur à 0.5, et dans le cas où $0.5 \leq M_2/M_1 \leq 20$, par

$$\frac{R_2}{a} = 0.38 + 0.20 \log \frac{M_2}{M_1} \quad (15)$$

Dans le cas des variables cataclysmiques, la masse de la secondaire (par définition, on appelle alors ainsi l'étoile qui perd de la masse) est inférieure à celle de la primaire, sinon le transfert de masse serait instable, et souvent notablement inférieur. Dans ce cas, si on combine l'équation (14) avec la loi de Kepler donnant a , on obtient

$$\frac{R_2}{R_\odot} = 0.23 M_2^{1/3} P_{\text{hr}}^{2/3} \quad (16)$$

qui ne dépend pas de la masse de la primaire. En particulier, la densité moyenne de la secondaire

$$\rho = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{110}{P_{\text{hr}}^2} \text{g cm}^{-2} \quad (17)$$

ne dépend que de la période orbitale. Cette valeur est typique des densités moyennes d'étoiles sur la séquence principale si la période est de quelques heures.

2. Variations ellipsoïdales

Si la structure interne d'une étoile n'est que modérément perturbée par la présence d'un compagnon, cela ne signifie pas pour autant que la présence d'un compagnon, même invisible, n'est pas détectable. On se rapportera au chapitre *Calcul des éléments des binaires à éclipses* (P. North) pour le cas général ; on ne considèrera ici que le cas des binaires X de faible masse, et plus précisément des transitoires X, dans lesquelles l'étoile K ou M domine dans le domaine visible pendant les phases de quiescence. On voit alors la rotation d'une étoile déformée. L'analyse des courbes de lumière optique des transitoires en quiescence permet de contraindre fortement les masses des deux étoiles ; c'est aujourd'hui la seule méthode qui permet de déterminer avec certitude que des systèmes tels que A0620-00 ou GRO J1655-40 contiennent un trou noir.

Les ingrédients de la modélisation sont bien sûr la géométrie de Roche, puisque l'angle solide sous lequel on voit l'étoile varie avec la phase orbitale. Il faut également tenir compte de l'assombrissement par gravité $T/T_{\text{pole}} = (g/g_{\text{pole}})^\beta$, où T est la température et g la gravité. β est un coefficient qui vaut 0.08 si l'enveloppe est convective, et 0.25 si elle est radiative. Cette variation est particulièrement importante lorsque l'étoile remplit son lobe de Roche, puisque g s'annule en L_1 . Il faut enfin corriger de l'assombrissement centre-bord, ce qui nécessite d'utiliser des modèles d'atmosphère.

La luminosité sera maximum lorsqu'on verra l'étoile sous le plus grand angle solide, et minimale lorsqu'il y a conjonction ou opposition. Les deux minima sont de profondeur différente ; la face de la secondaire tournée vers le compagnon a une gravité de surface plus faible que la face opposée, et est donc moins lumineuse.

L'amplitude des variations est donnée approximativement par (Russel 1945 ; McClintock et al. 1993)

$$\Delta m = \frac{3}{2} \frac{M_2}{M_1} f^3 \left(\frac{R_2}{a} \right)^3 \sin^3 i (1 + \tau_0) \frac{15 + u}{15 - 5u} \quad (18)$$

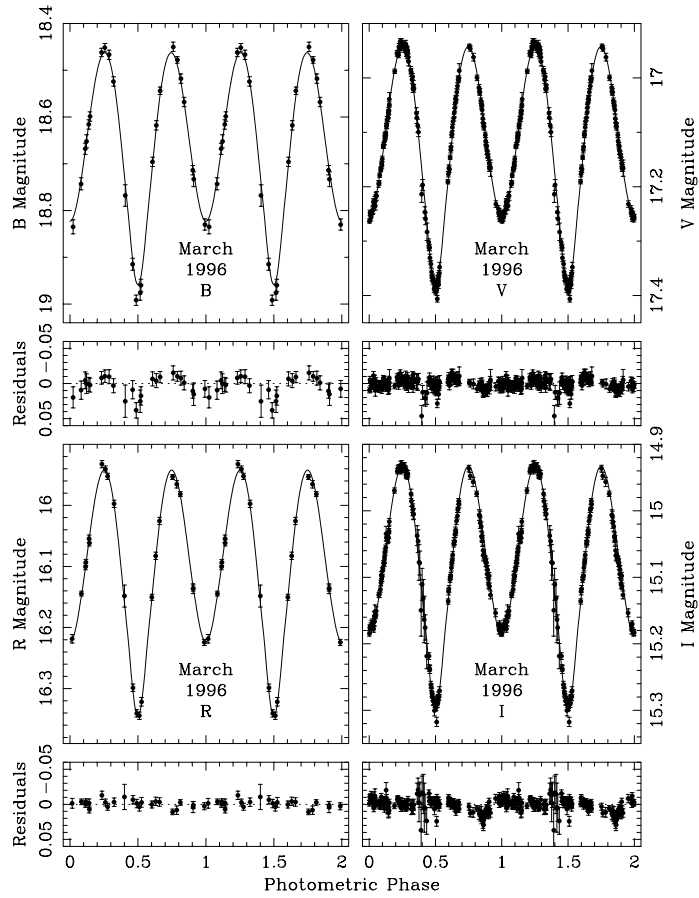


Figure 4.: *Un exemple de variations ellipsoïdales de GRO F1655-40 dans les bandes B (gauche) et R (droite) à deux époques différentes. Les points sont les mesures, les courbes en trait plein les ajustements (Orosz & Bailyn 1997).*

où f est la fraction du lobe de Roche qui est remplie, $\tau_0 \sim 1$ corrige de l'assombrissement par gravité ($\tau_0 = 0.57$ pour une étoile K5 de température effective 4000 K), et u corrige de l'assombrissement centre-bord, et est fonction de la température effective et de la gravité (pour cette même étoile K5, avec $\log g = 4$, $u = 0.85$).

La figure 4 montre le cas de la transitoire GRO J1655-40 ; les variations ellipsoïdales sont très clairement visibles, et l'accord entre les observations et le modèle est remarquable. Il faut néanmoins noter que le nombre de paramètres libres est important, et que des corrections addi-

tionnelles, dues en particulier à la présence d'un disque d'accrétion ont été faites. Ces observations ont permis de montrer que le rapport de masses doit être supérieur à 2.60 (limite à 3σ , modèle le plus défavorable). Comme la masse du compagnon est largement supérieure à $1 M_{\odot}$, la masse de l'objet compact dépasse largement la limite de masse d'une étoile à neutrons ($3 M_{\odot}$).

Références

- [1] McClintock J.E., Petro L.D., Remillard R.A., Ricker G.R., 1993, ApJ 266, L27
- [2] Orosz J.A., Bailyn C.D., 1997, ApJ 477, 876
- [3] Paczyński B., 1971, ARAA 9, 183
- [4] Plavec M., Kratochvil P., 1964, Bull. Astron. Inst. Czech 15, 165
- [5] Russel H.N., 1945, ApJ 102, 1