Grands Relevés et Observatoires Virtuels
Ecole CNRS de Goutelas XXIV (2001)
Edité par D. Egret, J.-L. Halbwachs et J.-M. Hameury

Cosmologie et Grands Relevés

Yannick Mellier

Institut d'Astrophysique de Paris

Observatoire de Paris (DEMIRM)

Abstract.

This lecture on cosmology and surveys is an introduction to cosmology. Cosmological models and the most recent observational results are presented. Particular emphasis is made on the impact of large surveys on the measurement of fundamental quantitites, like cosmological parameters, power spectrum or biasing. Surveys are presented as illustrations all along the lecture.

Table des matières

1. Introduction **23**

2. Contenu et propriétés de l'Univers observable **25**

2.1 Propriétés statistiques des galaxies 25
Masse. 25
Dimension. 26
Fonction de Luminosité. 26
Preuve de l'expansion de l'Univers. 28
Comptage des galaxies. 32
Plan Fondamental et Tully-Fisher. 34

2.2 Distribution spatiale et structuration 38
L'Univers local. 38
Cartographie de l'Univers lointain. 40
Caractérisation de la structuration. 41

2.3 Propriétés des amas de galaxies 47
Propriétés internes. 48
Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas. 49

2.4 Propriétés du gaz intergalactique 52

2.5 Propriétés statistiques des quasars 57

2.6 Les fonds de rayonnement 59

2.7 L'âge de l'univers 63
Nucléocosmochronologie. 63
Âge des amas globulaires. 65
Temps de refroidissement des naines blanches. 65
2.8 Remarque sur le Paradoxe d'Olbers 66

3. Les bases de la cosmologie moderne 67
3.1 Construction des équations d'Einstein 69
3.2 Principe cosmologique 70
3.3 Conséquences du principe cosmologique 73
Loi de Hubble. 73
Redshift. 74

4. Cosmographie : grandeurs physiques des univers homogènes et isotropes 75
4.1 Paramètre de décélération 75
4.2 Temps écoulé 76
4.3 Distances et tests cosmologiques classiques 77
Distance lumineuse. 78
Distance diamètre angulaire. 79
Relation magnitude-redshift. 80
Relation Comptage-magnitude. 81
"Dimming factor" : effet de brillance de surface. 82
K-correction 84
Les tests cosmologiques classiques. 85

5. Les modèles d'univers de Friedmann 87
5.1 Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d'intérêt cosmologique 87
Élements non-nuls du tenseur métrique 87
Élements non-nuls des symboles de Christoffel 88
Composantes du tenseur de Ricci, courbure 88
Composantes du tenseur d'Einstein 88
5.2 Équations de Friedmann sans constante cosmologique . . 89
Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann. 90
Propriétés générales des modèles de Friedmann 91
5.3 Cas du modèle Einstein-de Sitter : $\Omega = 1$ 94
Cas du modèle dominé par le rayonnement : $\omega = 1/3$ . . 95
Cas du modèle poussière : $\omega = 0$ 96
5.4 Cas des modèles courbes : $\Omega \neq 1$ 96

6. Description des 3 modèles standards 97

6.1 Cas du modèle poussière $\omega = 0$ 97
Modèle euclidien : $k = 0$ 98
Modèle elliptique (fermé) $k = 1$, $\Omega > 1$. 98
Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1$, $\Omega < 1$. 99
6.2 Cas des modèles radiatifs $\omega = 1/3$ 99

7. Modèles à constante cosmologique 100

8. Analyse rétrospective de quelques faits observationnels 103
8.1 Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann 103
8.2 Le problème de l'horizon 103
8.3 Le problème de la platitude 105
8.4 Comptage en fonction du redshift 105
8.5 Profondeur optique 106
8.6 L'effet Sunyaev-Zeldovich 108

9. Mesure des paramètres cosmologiques 110
9.1 Mesure de H_0 111
9.2 De la mesure du rapport M/L à Ω_m 112
Galaxies. 114
Groupes de galaxies. 114
Amas de galaxies. 114
Les mouvements à grande échelle des galaxies. 130
En résumé. 134
9.3 Mesure du couple Ω_m, Ω_Λ 134
Les supernovae de type Ia. 136
La fraction des quasars amplifiés. 137
Les arcs gravitationnels. 138
Les effets de distorsion gravitationnelle cosmologique . . 139
Contrainte des anisotropies du fond diffus cosmologique. 143
9.4 La matière noire 144

10. Évolution du spectre du corps noir cosmologique 153

11. Histoire thermique de l'Univers 154
11.1 Transition matière-rayonnement 155
11.2 Découplage et recombinaison 157
11.3 Nucléosynthèse primordiale des éléments légers 160
11.4 Comparaison avec les observations 163
11.5 Contrainte sur la fraction de baryons 163

12.Les nouveaux instruments de la cosmologie **165**

13.Annexes **168**
13.1 Annexe A : projection de la fonction de corrélation . . . 168
13.2 Annexe B : théorème du viriel 169
13.3 Annexe C : la sphère isotherme singulière 171
13.4 Annexe D : Angle de déflexion et densité de matière . . . 176
13.5 Annexe E : notions sur les tenseurs 179
Vecteurs contravariants. 179
Vecteurs covariants. 180
Tenseurs 180

Bibliographie

Compte tenu de la grande diversité d'origine et d'objectif des étudiants, ces références bibliographiques couvrent un domaine assez vaste en niveau et en contenu.

1. F. Combes, P. Boissé, A. Mazure, A. Blanchard, *Galaxies et cosmologie*. InterEditions/CNRS. 1991.
2. M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, Masson 1992.
3. A. Mazure, G. Mathez, Y., Mellier, *Chronique de l'espace-temps*, Masson. 1997.
4. J. Merleau-Ponty, *Cosmologies du XXième siecle*, Gallimard. 1965.
5. C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman. 1973.
6. T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, CUP. 1993.
7. J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, CUP, 1999.
8. P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, PUP. 1993.
9. P. J. E. Peebles, *Large-Scale Structures of the Universe*, PUP. 1980.
10. H. Stephani, *General Relativity*, CUP. 1996.
11. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley. 1972.

Une brève histoire de la cosmologie du XXième siecle

- **1915** Einstein. Théorie de la relativité générale.
- **1920** Preuve de la nature extragalactique des galaxies.
- **1922** Modèles de Friedmann. Première intuition du Big Bang.
- **1927** Modèles de Lemaître. Modèle de l'atome primordial.
- **1928-1929** Robertson, Hubble. Preuve observationnelle de l'expansion de l'univers.
- **1933** Zwicky. Analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma. Naissance du problème de la *masse manquante*.
- **1940** Gamov. Suggestion de la nucléosynthèse des éléments dans l'Univers chaud. Prédiction d'un rayonnement résiduel fossile.
- **1940** Alpher & Herman. Premiers calculs de nucléosynthèse primordiale.
- **1948** Bondi, Gold, Hoyle. Modèle stationnaire.
- **1963** Découverte du premier quasar.
- **1965** Penzias & Wilson. Découverte du rayonnement cosmologique à T=2.7 K.
- **Années 1970** Origine des galaxies et des structures : quand , où , comment ?
- **Années 1970** Modèles isothermes (bottom-up) et adiabatiques (Top-down) en confrontation.
- **1981** Mise en évidence observationnelle des courbes de rotation plates des galaxies spirales. Évidence de halo de *matière noire* ?
- **Années 1980** Echec des modèles de formation des structures avec matière baryonique seule. Naissance des modèles avec matière non-baryonique : Hot Dark Matter (HDM, s'apparente aux modèles top-down) et Cold Dark Matter (CDM, s'apparente aux modèles bottom-up).
- **1981** Guth. Théorie de l'inflation. Apporte un cadre théorique expliquant les problèmes de la "platitude" de l'Univers et de l'Horizon. Prédit le spectre de fluctuation primordiale.
- **1985** Arcs gravitationnels. Preuve directe que les amas de galaxies sont dominés par leur contenu en matière noire.
- **1986** Redshift survey : mise en évidence de la structuration tridimensionnelle des galaxies, qui se trouvent disposées sur les parois de gigantesques bulles dont l'intérieure semble vide de lumière.

- **1992** COBE : spectre de corps noir du rayonnement fossile. T=2.725 K. Carte des fluctuations de température du rayonnement cosmologique. Observations compatibles avec une origine purement gravitationnelle, un spectre de puissance des fluctuations invariant d'échelle et des structures engendrées par un champ de fluctuation de densité gaussien.
- **1997-1999** Diagramme magnitude-distance des supernovae de type Ia. Preuve que l'univers est accéléré. Compte tenu des connaissances actuelles, la constante cosmologique est vraisemblablement non nulle.
- **2000** BOOMERANG et MAXIMA : mise en évidence du premier pic (dit pic acoustique) du spectre des fluctuations de température du rayonnement cosmologique qui démontre que notre univers est vraisemblablement plat.
- **2000-2001** Premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique. Premières déterminations de Ω_m et σ_8 par ces effets.

Notations et quantités usuelles

c = célérité de la lumière (2.998×10^{10} cm.sec^{-1}),
G= constante de la gravitation (6.67×10^{-8} cm^{3}g^{-1}sec^{-2}),
$\hbar$=constante de Planck ($1.05\ 10^{-27}$ erg.sec),
$L_\odot$ = 1 luminosité solaire (4×10^{33} erg.sec^{-1}),
$M_\odot$ = 1 masse solaire (2×10^{33} g),
$h = H_0/100$ km.sec^{-1}.Mpc^{-1},
1Jy = 1 Jansky = 10^{-23} erg cm^{-2} sec^{-1} Hz^{-1},
Domaine Radio : λ=30cm - 10m,
Domaine micro-onde et submillimétrique : λ=0.02cm - 30cm,
Domaine infrarouge : λ=0.01cm - 8000 Å,
Domaine visible et UV : λ=8000 Å- 100 Å,
Domaine X et γ : λ=0.003 Å- 100 Å,
1 keV=1.16×10^7 K,
1' = 1 minute de degré,
1' = 180 h^{-1} kpc si $z = 0.3$ et $\Omega_m = 0.3, \Omega\Lambda = 0$..

Quelques échelles

1 Mégaparsec (Mpc)= $3.08\ 10^{24}$ cm.
Masse des galaxies 10^6-10^{13} $M_\odot$.
Masse des amas de galaxies $\approx 10^{14}$- 10^{15} $M_\odot$.
Dimension d'un amas de galaxies 1-5 Mpc.
Temps de traversée d'un amas par une galaxie : $\approx 10^9$ ans.
Dimension d'un supermamas 10-30 Mpc.
Diamètre des structures en "bulles" $\approx$ 50 Mpc.
Epaisseur des structures en "bulles" $\approx$ 5 Mpc.
Constante de Hubble : H_0=70$\pm$ 15 km sec^{-1}Mpc^{-1}.
Dimension de l'Univers (distance de Hubble) : 3000 h^{-1} Mpc.
Temps de Hubble : H_0^{-1}=9.8×10^9 h^{-1} ans.
Densité de l'Univers : $\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29}\ \Omega\ h^2$ g cm^{-3} = $1.05\ 10^4\ \Omega\ h^2$ eV cm^{-3}.

1. Introduction

La cosmologie a pour objet l'étude de la formation et de l'évolution de l'Univers et de ses constituants pour en expliquer l'origine, la structure actuelle et son devenir. C'est un champ extraordinairement vaste et parfois spéculatif qui couvre des domaines de la physique très divers. L'organigramme de la figure 1 tente d'en dégager schématiquement quelques lignes directrices fortes. Par nature, la cosmologie est inévitablement conduite à aborder des problématiques qui dépassent largement celles de la physique. Cependant, il existe aussi une "cosmologie physique" qui cherche à fonctionner selon les règles et les méthodes des sciences physiques pour interpréter les faits observationnels et construire un modèle cohérent expliquant l'univers et son histoire.
La cosmologie physique la plus standard s'appuie sur une théorie de la gravitation, la relativité générale, le principe cosmologique et des faits observationnels bien établis, comme l'expansion de l'univers, le rayonnement cosmologique fossile et la nucléosynthèse primordiale. Le modèle du Big Bang est un des plus remarquables succès de la cosmologie physique du XX^{ieme} siècle. Même s'il est important de conserver à l'esprit que des cosmologies alternatives sont proposées, il faut bien avouer qu'aucune n'est en mesure d'expliquer de façon aussi simple la plupart des phénomèmes observés dans l'Univers. C'est pour cette raison, et aussi parce que c'est une connaissance préalable incontournable à des recherches plus spéculatives, que je me concentrerai sur cette cosmologie standard.
Il est incontestable que du point de vue observationnels, c'est avec les grands relevés que la cosmologie a fait ses plus grands progrès au cours des vingt dernières années. Les dix prochaines années devraient prolonger cet âge d'or car les projets les plus ambitieux sont en cours ou en phase préparatoire. Ce cours a pour objectif de resituer ces relevés dans leur contexte, d'expliquer les grands objectifs de la cosmologie et de faire ressortir l'apport des grands relevés photométriques (APM, IRAS, Einstein, SDSS, 2MASS, Chandra, XMM), spectroscopiques (CfA, CFRS, LCRS, CNOC1/2, 2dF, SDSS, VIRMOS, DEEP, XMM), CMB (COBE, BOOMERANG, MAXIMA, MAP, Planck), de suivis temporels (Supernovae, décalages temporels), ou d'imagerie gravitationnelle (VIRMOS-DESCART, RSCS, MEGACAM CFHLS, VISTA). J'insiste plus particulièrement sur la situation des données observationnelles, les modèles d'univers et les tests observationnels des modèles cosmologiques. J'ai cependant volontairement évité d'aborder certains aspects théoriques se rapportant à la formation des structures ou à d'évolution des galaxies.

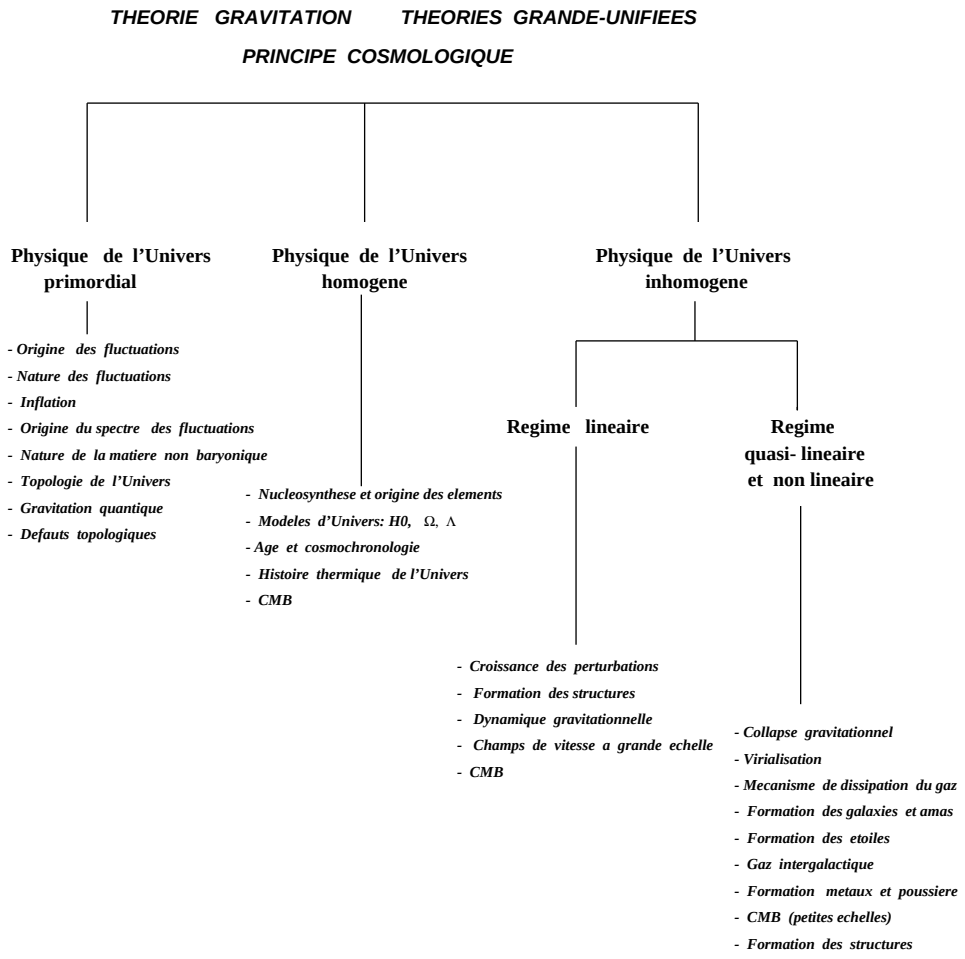

Figure 1.: *Tableau schématique des grandes thématiques de la cosmologie actuelle. Les séparations sont seulement indicatives pour tenter d'en dégager les grands axes. Mais chacune de ces thématiques est fortement imbriquée avec les autres et il ne faut surtout pas considérer cette illustration comme une structuration figée reflétant une représentation unique de la cosmologie.*

2. Contenu et propriétés de l'Univers observable

Avant de présenter les bases de la cosmologie physique, il est intéressant de préciser les propriétés les plus immédiates de l'Univers observable. Cette description préliminaire permet de dresser notre cadre général. On y reviendra fréquemment dans la suite du cours pour interpréter ces propriétés dans un cadre théorique plus précis, notamment lorsque nous aurons discuté les modèles d'Univers et le modèle du Big Bang.
L'Univers est composé pour l'essentiel de neutrinos, de photons et de matière baryonique et (peut être) non-baryonique. Son contenu matériel nous est révélé pour l'essentiel par la lumière. Au cours des vingt dernières années notre perception de la composition et de la structuration de l'Univers a été profondément modifiée. L'arrivée des télescopes géants, le développement rapide de l'astronomie spatiale et des nouveaux détecteurs ultrasensibles, et la possibilité de cartographier d'immenses volumes d'univers sont les facteurs à l'origine de ces progrès.
En résumé, pour le cosmologiste observateur, l'Univers est composé de galaxies, de quasars, de gaz, de matière noire et d'un bain de photons. Ces observables fournissent une illustration de l'Univers qu'il convient de conserver en mémoire par la suite comme une ébauche du tableau que nous devons reconstituer.

2.1 Propriétés statistiques des galaxies

D'un point de vue cosmologique les galaxies peuvent être perçues comme

- des points échantillonnant les grandes structures de l'Univers et qui témoignent des processus de formation des structures, ou bien
- comme des objets lumineux qui nous racontent l'histoire de la formation des étoiles et des mécanisme de formation des galaxies.

Ce sont donc des objets privilégiés pour les cosmologistes. Je présente ici les propriétés globales qui nous intéressent.

Masse. Les masses des galaxies varient de 10^6 (galaxies naines) à 10^{13} $M_\odot$ (galaxies géantes d'amas de galaxies). Les analyses dynamiques des galaxies, par les courbes de rotation des galaxies spirales ou par la dynamique des étoiles des galaxies elliptiques, montrent que les galaxies sont dominées par un contenu invisible, appelé génériquement la matière noire. La quantité et la nature de cette matière noire sont encore indéterminées. La fraction de matière totale est estimée en calculant le rapport *masse-sur-luminosité* de la galaxie rapporté à celui du Soleil (mais noté cependant : M/L). Pour les galaxies, $3 < M/L < 100$, avec une valeur médiane de l'ordre de 10-30. Des rapports M/L de 100 ont été mesurés

dans des galaxies elliptiques ou des galaxies à coquilles. Mais les estimateurs sont parfois incertains et ces valeurs demandent une confirmation par des méthodes indépendantes.

Dimension. Les dimensions des galaxies sont aussi très dispersées. Celles évaluées par la distribution des étoiles varient de 5 à 500 kpc, mais les valeurs typiques sont de l'ordre de 10 kpc. Certaines galaxies géantes d'amas de galaxies, dites galaxies cD, atteignent 100 kpc. La galaxie centrale de l'amas de galaxies Abell 2029 est à ce jour la plus grande galaxie connue (500 kpc). Les dimensions des halos des galaxies, qui pourraient être composés de matière baryonique de très faible luminosité et/ou de matière noire non-baryonique, sont inconnues. Leur extension pourrait atteindre 100 kpc, voire plus.

Fonction de Luminosité. On caractérise la distribution en luminosité des galaxies par la *fonction de luminosité*. Elle traduit la densité de lumière provenant des galaxies. La fonction de luminosité différentielle est le nombre de galaxies de luminosité entre L et $L + \mathrm{d}L$. Les observations des galaxies indiquent que la fonction de luminosité globale, Φ, qui intègre les contributions de tous les types morphologiques de galaxies, est bien représentée par une loi empirique, appelée *fonction de Schechter* :

$$n(L) = \Phi(L)\mathrm{d}L = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{\mathrm{d}L}{L^*} , \qquad (1)$$

avec

$$\frac{L}{L^*} = 10^{0.4(M^*-M)} \qquad (2)$$

où Φ^* est une densité volumique caractéristique de galaxies, L^* une luminosité caractéristique, et M^* la magnitude correspondante. Elles traduisent l'inflexion de la fonction de la luminosité. Enfin α est une pente typique qui caractérise l'allure de la distribution aux faibles luminosités et donc la contribution des galaxies faibles à la quantité de lumière et de matière de l'Univers.
Les paramètres sont mesurés à partir des cartographies photométriques du ciel et des relevés spectroscopiques qui permettent de calibrer la densité volumique de galaxies et de lumière. Les valeurs les plus récentes du catalogue anglo-australien "2-degree-Field" 2dF[1] portant sur un échantillon de 45000 galaxies donnent, pour $\Omega_0 = 1$:

- M^*=-19.75 $\pm$0.05, $\alpha = -1.09 \pm 0.03$, Φ^*=0.0202 $\pm$0.0002 h^3 Mpc^{-3} ,

[1] Cross et al 2001 ; MNRAS 324, 825

alors que les premiers résultats du relevé américain du *Sloan Digital Sky Survey*, ou SDSS[2] portant sur 11200 galaxies sont légèrement différents :

- M^*=-20.83 $\pm$0.03, $\alpha = -1.20 \pm 0.03$, Φ^*=0.0146 $\pm$0.0012 h^3 Mpc^{-3}

.

Ces différences sont des effets de couleur, le 2dF étant basé sur une photométrie des galaxies en bande B alors que le SDSS est en bande r. Les fonctions de luminosité du relevé 2dF sont représentées sur la Fig. 2 par type morphologique.
On peut calculer le nombre de galaxies par unité de volume dont la luminosité est supérieure à une limite L_{min} :

$$\begin{aligned} N(L > L_{min}) &= \int_{L_{min}}^{\infty} \Phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{\mathrm{d}L}{L^*} && (3)\\ &= \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^{\alpha} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y && (4)\\ &= \Phi^* \Gamma\left(1+\alpha; \frac{L}{L^*}\right) , && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

où $\Gamma(a;y)$ est la fonction Gamma incomplète.
La densité numérique de galaxies intégrée sur la totalité des luminosités est donc

$$n_{gal} = \Phi^* \Gamma\left(1+\alpha\right) \tag{7}$$

et nous donne immédiatement un ordre de grandeur de la contribution des galaxies à la densité de matière de l'Univers :

$$\rho_{gal} \approx \Phi^* \Gamma\left(1+\alpha\right)\ h^3 \mathrm{Mpc}^{-3} \times \langle M_g \rangle \approx 10^{-31} h^3\ \mathrm{gcm}^{-3} , \tag{8}$$

avec $\langle M_g \rangle \approx 10^{11}\ \mathrm{M}_{\odot}$ est la masse moyenne d'une galaxie de l'échantillon.
On peut également déterminer la densité de luminosité :

$$\begin{aligned} \rho_L(L > L_{min}) = &= \int_0^{\infty} n(L)\ L \mathrm{d}L && (9)\\ &= L^* \Phi^* \int_{L_{min}}^{\infty} \frac{L}{L^*} \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{\mathrm{d}L}{L^*} && (10)\\ &= L^* \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^{(2+\alpha)} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y && (11)\\ &= L^* \Phi^* \Gamma\left(2+\alpha; \frac{L}{L^*}\right) . && (12)\\ & && (13) \end{aligned}$$

[2]Blanton et al 2001; AJ 121, 2358

Donc la densité de luminosité totale est

$$\rho_L = L^* \Phi^* \Gamma \left(2 + \alpha\right) \ . \tag{14}$$

Pour fixer les idées, une compilation des relevés spectroscopiques conduit aux valeurs typiques suivantes :

$$\rho_L = 2.0 \pm 0.5 \times 10^8 \ h \ L_\odot \ \mathrm{Mpc}^{-3} \ , \tag{15}$$

le *2dF* conduisant plutôt à

$$\rho_L = 2.5 \pm 0.2 \times 10^8 \ h \ L_\odot \ \mathrm{Mpc}^{-3} \tag{16}$$

et le SDSS à

$$\rho_L = 2.6 \pm 0.3 \times 10^8 h \ L_\odot \ \mathrm{Mpc}^{-3} \ . \tag{17}$$

Preuve de l'expansion de l'Univers. C'est Hubble en 1929 qui a annoncé le premier la relation entre le décalage spectral et la distance des galaxies (Robertson avait constaté dès 1928 que les données de Slipher et Hubble montraient une relation entre distance et décalage spectral). Cette relation s'interprète comme la preuve la plus tangible de l'expansion de l'univers.
La caractérisation de la loi d'expansion est simple dans son principe. On mesure les vitesses radiales des galaxies à partir de données spectroscopiques. Le décalage vers le rouge observé des raies d'émission et/ou d'absorption est ainsi mesuré directement :

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \ , \tag{18}$$

où λ_{obs} est la longueur d'onde d'une raie observée sur le spectre et λ_{em} la longueur d'onde vraie de la raie. On en tire donc la vitesse radiale d'une galaxie de l'Univers proche :

$$v = cz \ , \tag{19}$$

où c est la célérité de la lumière.
On peut mesurer la distance D des galaxies par diverses méthodes. Par exemple, en utilisant la relation Période-Luminosité-Couleur des étoiles variables Céphéides.
Hubble a montré que cette loi s'exprimait simplement sous la forme

$$v = H_0 \times D \ . \tag{20}$$

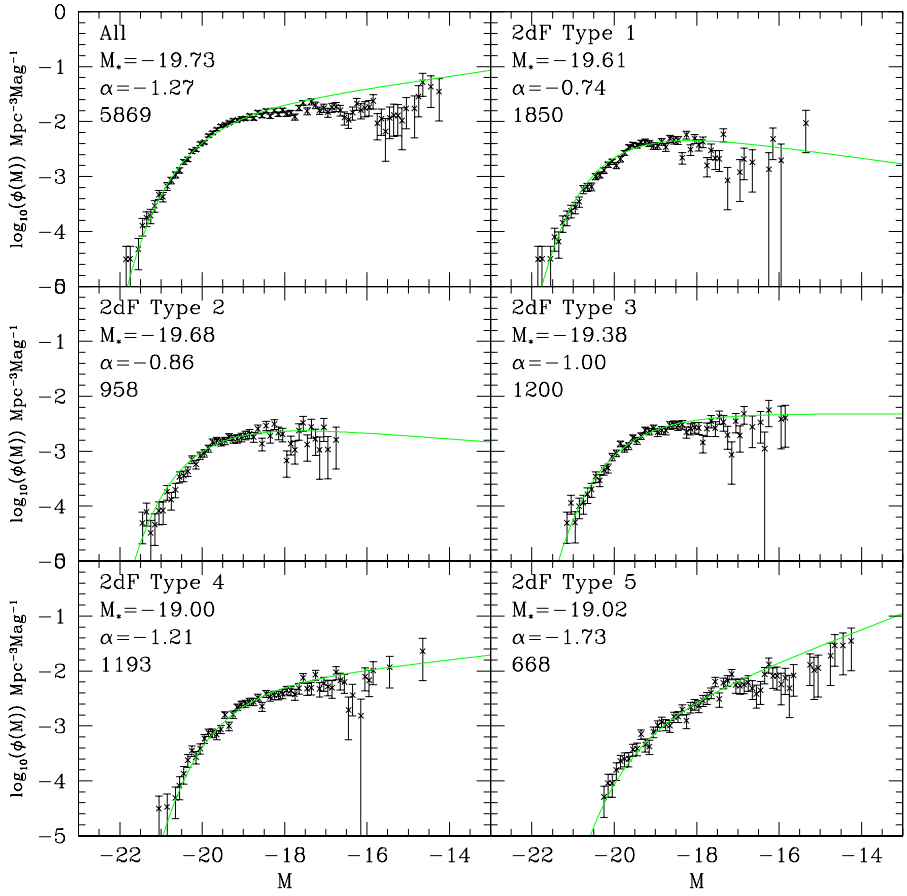

Figure 2.: *Mesure et ajustement de la fonction de luminosité différentielle des galaxies du relevé 2dF. Les galaxies ont été cataloguées en 5 ensembles selon leurs propriétés spectrales qui reflètent leur contenu en étoiles (âge, métallicité) et en poussières. Les paramètres des fonctions de luminosité sont légèrement différents des valeurs données dans le texte car ces figures correspondent à des données de 1999 portant sur un échantillon plus petit (d'après Folkes et al 1999, MNRAS 308, 459).*

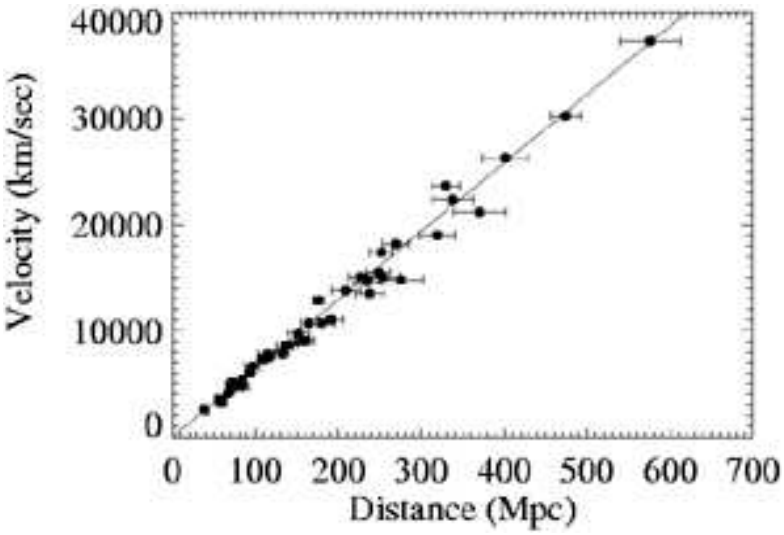

Figure 3.: *Loi de Hubble mise en évidence sur un échantillon de supernovae. L'écart à la linéarité est faible et la validité de l'expansion est verifiée sur des échelles cosmologiques.*

H_0 est la constante de Hubble. C'est la *Loi de Hubble*. La figure 3 montre la remarquable linéarité observée, même sur des distances de l'ordre du Gigaparsec.

Le décalage spectral affectant les fréquences, l'expansion se manifeste aussi sous la forme d'une dilatation temporelle des événements. L'analyse de la dilatation des courbes de luminosité des supernovae permet en particulier de vérifier cette interprétation avec précision (voir Figure 4). Une façon alternative de mettre en évidence l'expansion consiste à exprimer la magnitude apparente d'une galaxie en fonction du décalage spectral (*redshift*). La magnitude apparente m est

$$m = -2.5\log(F) + C \tag{21}$$

où C est une constante est F la densité de flux de la galaxie. F est reliée à sa luminosité absolue, L, à sa distance, D, et donc au décalage spectral (voir Equation 20) par :

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L}{4\pi}\frac{H_0^2}{c^2 z^2} \tag{22}$$

Si l'on observe un type particulier d'objet dont la propriété est d'avoir la même luminosité absolue quelle que soit la distance, alors L est constant et bien connue et la loi de Hubble implique une relation linéaire entre le

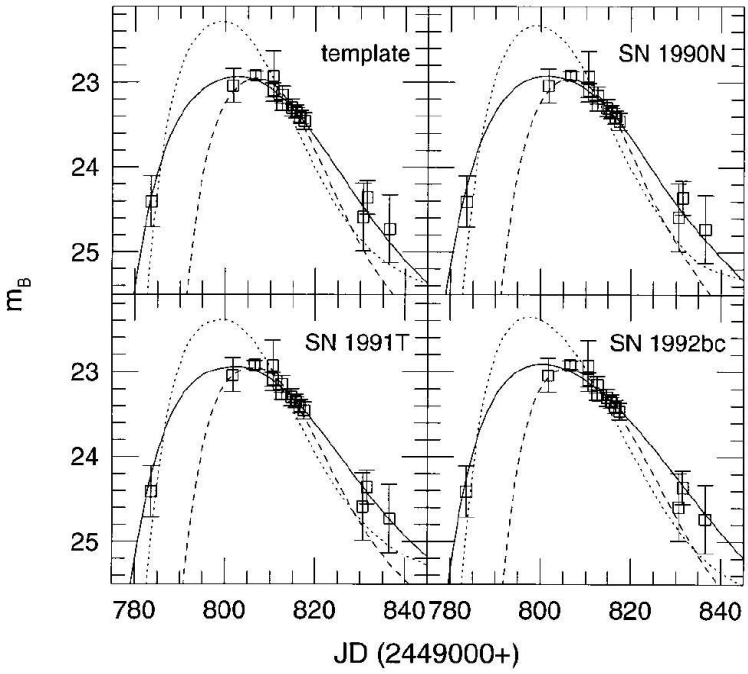

Figure 4.: *Dilatation de la courbe de lumière d'une supernova SNIa sous l'effet de l'expansion. Les points de mesures photométriques proviennent d'une SNIa à un redshift de* $z = 0.479$. *Les lignes pointillées correspondent aux courbes de lumière de quatre SNIa proches dont les courbes de lumière ont été ajustées en ne prenant pas en compte l'expansion. Les lignes continues correspondent aux mêmes SNIa mais en prenant en compte la dilation temporelle produite par l'expansion (d'après Leibundgut et al 1996, ApJ 466, L21).*

logarithme du décalage spectral z et la magnitude apparente :

$$m = 5 \times \log [z] + C' \tag{23}$$

Cette méthode permet de construire des *diagrammes de Hubble* à partir d'échantillons de galaxies distantes pour lesquelles on a de fortes présomptions que leur luminosité est constante. C'est par exemple le cas des galaxies les plus brillantes des amas de galaxies ou de certaines radiosources.

Enfin, il est possible d'établir l'expansion en mesurant directement l'évolution de la température du fond diffus cosmologique avec le redshift. L'expansion adiabatique de l'univers décroît progressivement la température du corps noir suivant la loi simple

$$T(z) = T_0 \times (1 + z) \tag{24}$$

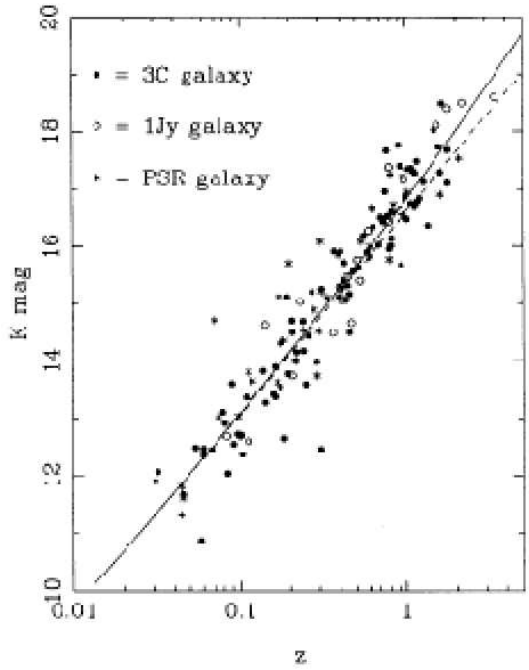

Figure 5.: *Diagramme de Hubble des radio-galaxies de l'échantillon 3CR, 1Jy et PKS. En abscisse est porté le logarithme de z en ordonnée les magnitudes apparentes en bande K (la bande K est un intervalle spectral centré sur 2.2 μm qui est utilisé pour les filtres large-bandes).*

où T_0 est sa température actuelle. La figure 6 montre les mesures actuelles, notamment la plus récente [3] qui constitue la mesure la plus convaincante d'un accroisseement de température suivant la loi attendue.

Comptage des galaxies. Les comptages de galaxies consistent à évaluer la densité de galaxies projetées sur le ciel par intervalle de magnitude. Ils indiquent le nombre de galaxies dans l'univers. Mais c'est aussi une donnée très importante pour contraindre les modèles d'univers. Deux types d'information y sont contenus : le volume d'univers sondé en projection et les effets d'évolution des galaxies qui affectent leur luminosité apparente dans chaque filtre d'observation.

[3] Srianand, Petitjean, Ledoux 2000, Nature 408, 931

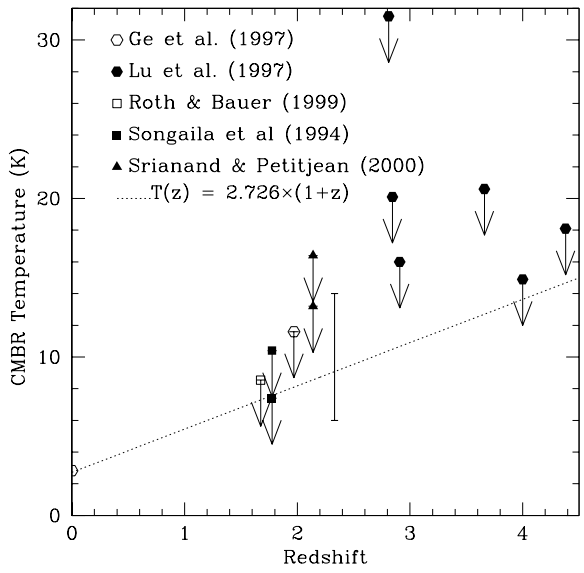

Figure 6.: *Mise en évidence de l'expansion de l'univers par la mesure du taux d'accroissement de la température du corps noir en fonction du redshift. Le point de Srianand et al. place pour la première fois une valeur solide à un redshift de 2.3. La température se situe entre 9K et 14 K, en accord avec la loi d'expansion.*

La pente des comptages est par définition

$$\alpha \;=\; \frac{d\log N}{dm}\;, \tag{25}$$

et varie d'un filtre à l'autre et selon la profondeur. Elle a tendance à décroître vers les faibles magnitudes. Pour les objets faibles elle vaut approximativement :

- 0.50 en U (U >25 ; Hogg et al 1997, MNRAS 288, 404),
- 0.25 en B ($B > 25$; Smail et al 1997),
- 0.28 en V ($V > 24.5$; Smail et al 1995 ApJ 449, L105)),
- 0.32 en R ($R > 21$; Smail et al 1995 ApJ 449, L105)
- 0.27 en I ($I > 20$; Smail et al 1995 ApJ 449, L105),
- 0.36 en J ($J > 21$; Saracco et al 1999, A&A 349, 751) et
- 0.38 en K ($K > 19$; Saracco et al 1999, A&A 349, 751).

Comme on le voit sur la figure 7, au-delà de magnitude visible 25, la densité de galaxies dépasse 10^5 gal.deg^{-2}.

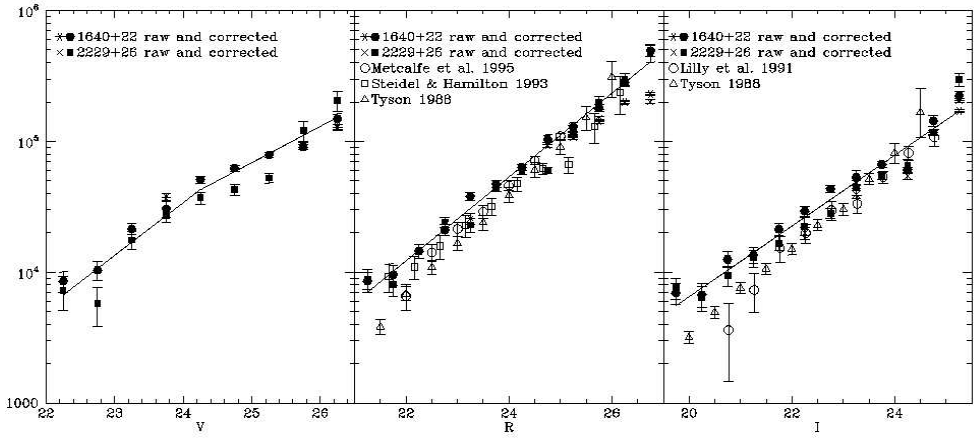

Figure 7.: *Comptage des galaxies dans les filtres V, R et I obtenus à partir d'observations très profondes au télescope Keck-I. En abscisse, les magnitudes apparentes ; en ordonnée, le nombre de galaxies par degré-carrés et intervalle de magnitude (d'après Smail et al, ApJ 449, L105).*

Plan Fondamental et Tully-Fisher. Les galaxies elliptiques (resp. spirales) présentent certaines propriétés physiques qui permettent de construire des relations simples entre leur profil de luminosité et leur dispersion de vitesse (resp. vitesse de rotation). Ces relations jouent un rôle essentiel dans la mesure des vitesses individuelles des galaxies qui sont indispensables pour décrire les mouvements à grande échelle des galaxies.

Pour les elliptiques, il existe une corrélation entre la luminosité, L, la brillance de surface centrale, I_0, et la dispersion de vitesse centrale des étoiles, σ_0 qui place les galaxies sur un *Plan Fondamental* :

$$L \propto I_0^{-0.7} \sigma_0^3 \ . \tag{26}$$

Cette relation est une signature de l'état dynamique des galaxies elliptiques et montre que ces galaxies doivent avoir des rapports M/L stables et peu sensibles à leur masse dynamique. En effet, en vertu du théorème du viriel, on a

$$\sigma_0^2 \propto \frac{M}{r_0} \ , \tag{27}$$

où M est la masse de la galaxie et r_0 une échelle caractéristique.
Supposons que le rapport M/L varie peu et selon une loi simple de type

$$\frac{M}{L} \propto M^{\alpha} \ . \tag{28}$$

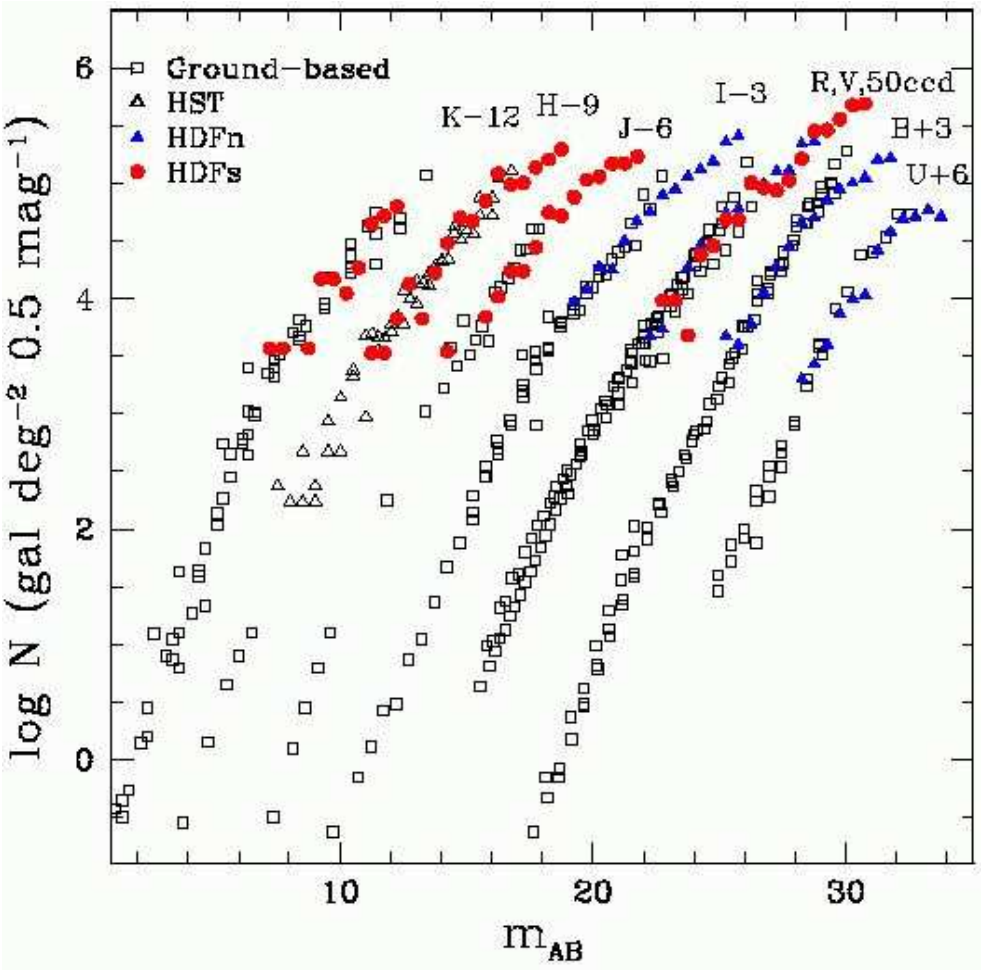

Figure 8.: *Compilation des comptages de galaxies du proche UV à l'infrarouge proche. De droite à gauche les longueurs d'onde sont 360 nm (U), 450 nm (B), 6500 nm (R, V), 800 nm (I), 1200 nm (J), 1600 nm (H) et 2200 nm (K). Chaque bande spectrale a été décalée de façon à pouvoir les reporter sur une seule figure synthétique.*

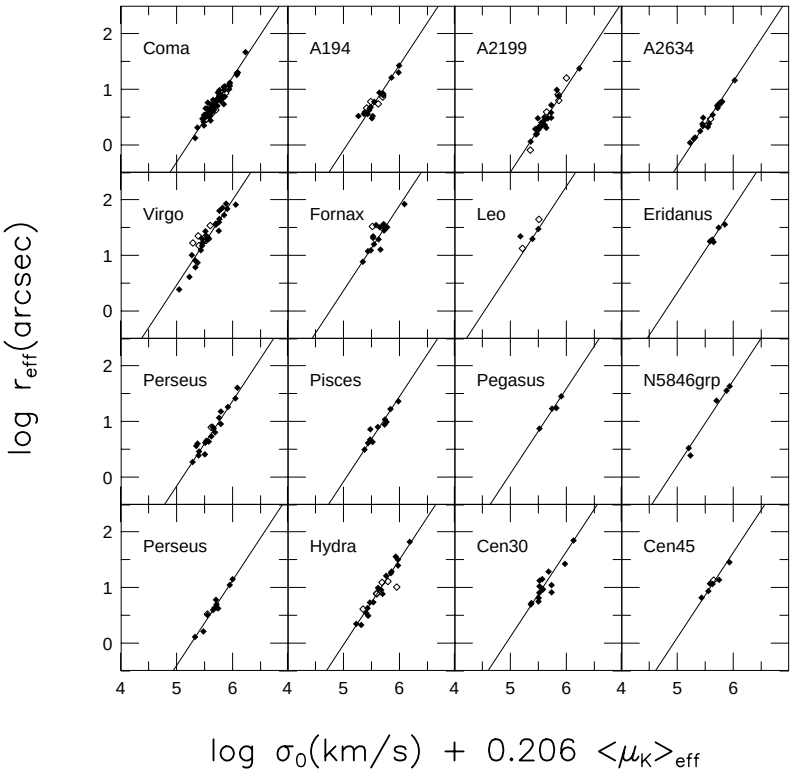

Figure 9.: *Détermination des paramètres du plan fondamental. En abscisse sont portées des combinaisons de la dispersion de vitesse centrale avec la brillance de surface en bande K et en ordonnée le rayon effectif (une échelle caractérique des galaxies). L'échantillon porte sur des galaxies elliptiques de 9 amas de galaxies proches, ce qui permet de s'affranchir des biais possibles associés à la mesure de distance : pour chaque courbe, les galaxies sont toutes à la même distance.*

Alors, comme

$$L \propto I_0 r_0^2 \tag{29}$$

on s'attend à une loi du type

$$L \propto I_0^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \sigma_0^{-4\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \tag{30}$$

qui est proche de la loi observée si $\alpha \approx 0.25$.
L'existence d'un plan fondamental implique une relation simple entre le diamètre isophotal[4], D_n, et la dispersion de vitesse. Cette relation $D_n - \sigma_0$, proposée par Dressler en 1987[5],

$$D - n \propto \sigma_0^{1.4} \tag{31}$$

s'interprète aisément. En effet, on peut calculer la brillance de surface moyenne d'une galaxie elliptique en supposant qu'elles présentent toutes un profil de luminosité identique de la forme $I(R) = I_e f(R/R_e)$. Dans ce cas

$$I_n = \frac{2\pi I_e \int_0^{D_h/2} R f(R/R_e)\, \mathrm{d}R}{\pi D_n^2/4} \tag{32}$$

Empiriquement, la loi est de la forme $f(x) \approx x^{-1.2}$. On peut donc intégrer l'équation précédente, ce qui conduit à une relation simple entre D_n et R_e :

$$D_n \propto R_e I_e^{0.8} \ . \tag{33}$$

L'existence du plan fondamental permet alors de remplacer R_e par σ_0

$$D_n \propto \sigma_0^{1.4} I_e^{0.07} \ . \tag{34}$$

La très faible dépendance avec I_e explique la relation $D_n - \sigma_0$.
Il existe une relation qui permet de localiser les galaxies elliptiques dans ce plan fondamental, c'est la relation de Faber-Jackson :

$$L \propto \sigma_0^{\alpha} \tag{35}$$

où $\alpha \approx 3 - 4$. L'origine de cette relation n'est pas totalement identifiée ; elle provient vraisemblablement des mécanismes d'effondrement hiérarchique des structures.

---

[4]Le diamètre isophotal est la dimension mesurée du diamètre d'un objet jusqu'à une isophote limite donnée.

[5]Dressler, A. 1987, ApJ 317,1

Une relation formelle analogue existe pour les galaxies spirales. Elle est connue sous le nom de relation de Tully-Fisher[6] :

$$L \propto V_r^{\alpha} \ , \tag{36}$$

où V_r est la vitesse de rotation, mesurée à grande distance (de façon à mesurer la vitesse de rotation maximale englobant la contribution de toute la masse). L'indice α vaut environ $3-4$. Il est très proche de 4 lorsque les observations de calibration sont en infrarouge.

L'origine de la relation de Tully-Fisher n'est pas vraiment comprise. Si l'on admet que le rapport M/L des spirales est constant le long du disque, alors on peut construire une relation de ce type. En effet, pour une particule du disque à la distance R du centre et tournant avec la galaxie à la vitesse V_r on a

$$m\frac{V_r^2}{R} = \frac{GM}{R^2}m \ . \tag{37}$$

Si l'on suppose que le rapport M/L est constant sur le disque et si l'on suppose que la brillance de surface du disque est constante, alors la luminosité totale, $L = \mu\pi R^2$, $L = kM$ et donc

$$L \propto V_r^4 \tag{38}$$

Cependant, on sait que la brillance de surface n'est pas constante et que le rapport M/L varie aussi.

Même s'il est encore difficile d'expliquer la relation de Tully-Fisher, son impact est considérable car c'est un indicateur de distance qui contribue à la fois à la représentation tri-dimensionnelle de l'univers, à la modélisation des champs de vitesse à grande échelle des galaxies et à la calibration d'indicateurs de distances cosmologiques.

2.2 Distribution spatiale et structuration

La distribution spatiale des galaxies est déterminée à partir des relevés spectroscopiques. Ils donnent accès à la distance des galaxies par la mesure du décalage spectral et en utilisant la *Loi de Hubble*.

L'Univers local. La distribution spatiale des galaxies permet de faire le lien avec la structuration à grande échelle de l'Univers visible.

La forte hétérogénéité des galaxies de notre voisinage est évidente aux toutes petites échelles. Notre galaxie (la Galaxie) appartient à un système dynamique, le Groupe Local, qui contient une cinquantaine de galaxies visibles dont deux systèmes dominants :

---

[6]Tully, R. B., Fisher, J. R. 1977, A&A 54, 661

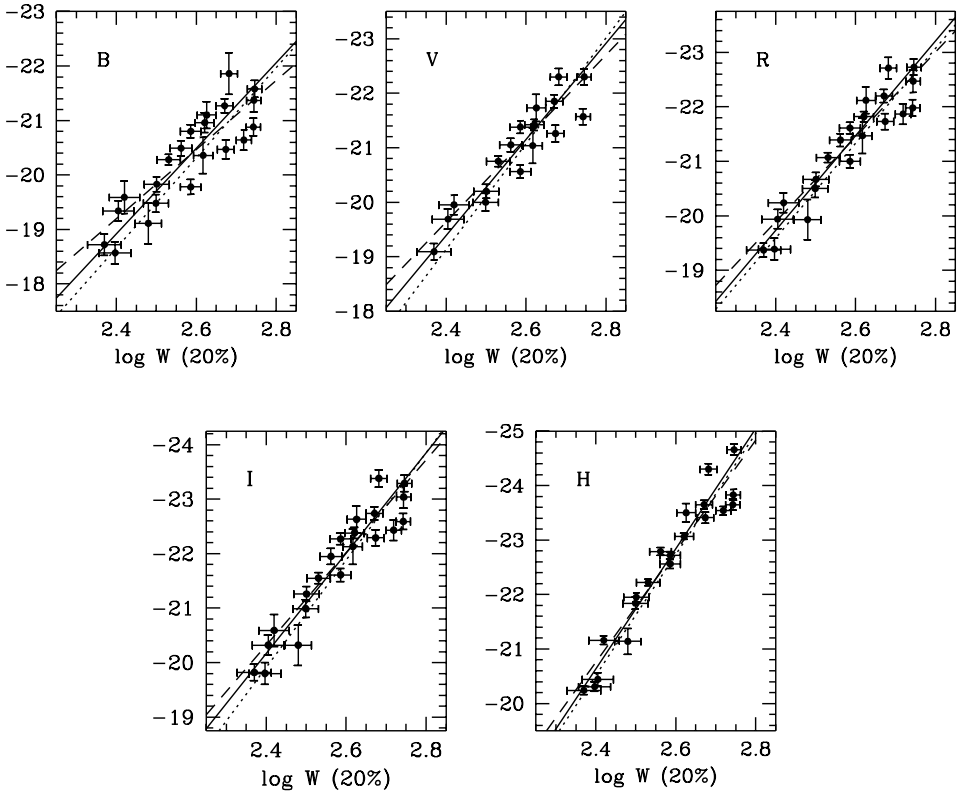

Figure 10.: *Luminosité absolue en fonction de la vitesse de rotation d'un échantillon de galaxies spirales. Les 5 figures montrent la relation de Tully-Fisher pour une luminosité mesurée dans 5 filtres différents. On voit que c'est pour la bande infrarouge (bande H centrée sur 1.6 μm) que la relation est la moins dispersée, probablement parce que les effets d'extinction par les poussières sont minimes. En revanche, la bande B est fortement affectée par ces effets ce qui explique la grande dispersion.*

- La Voie Lactée et ses galaxies voisines dont le Grand Nuage de Magellan, le Petit Nuage de Magellan. Un certain nombre de galaxies naines font partie de ce sous-système, notamment la galaxie elliptique naine du Sagitaire (SagDEG=Sagitarius Dwarf Elliptical Galaxy) et d'autres galaxies naines des constellations de la Grande Ourse, du Dragon et du Sextan.
- M31, située à environ 900 kpc de la Voie Lactée, et ses galaxies satellites M32 et M110, ainsi que NGC 147, NGC 185 et d'autres galaxies faibles. La grande galaxie M33 est le troisième objet le plus brillant du Groupe Local mais ne semble pas constituer une sous-structure indépendante bien identifée, comme pour M31 ou la Galaxie.

La dimension du Groupe Local est de l'ordre de 1 Mpc. Il est lui-même un petit élément du Superamas Local qui est dominé par l'amas de galaxies Virgo et qui contient aussi les amas Pegasus, Pisces, Cancer, Perseus et Coma Berenices. Le Superamas Local s'étend sur environ 50 Mpc (voir figure 11 et 12) et contient environ 50 000 galaxies visibles.

Cartographie de l'Univers lointain. Au-delà, les cartographies du ciel montrent une structure filamentaire fortement hétérogène. La figure 13 est une cartographie de l'Automated Plate Machine (APM) qui couvre 4300 degrés carrés projetés sur le ciel. Ce relevé a marqué la cosmologie observationnelle des années 80-90. S'il reste une référence, il est désormais dépassé par les grandes cartographies tridimensionnelles comme le 2dF ou le Sloan Digital Sky Survey (SDSS).
Les relevés spectroscopiques qui décrivent la structure spatiale de l'Univers montrent qu'il est pour l'essentiel vide de matière lumineuse. Les galaxies s'y distribuent suivant une topologie analogue à celle d'une structure en bulles (ou à celle d'une structure en éponge) dont elles occupent les parois, alors que le reste de l'espace ne montre aucune composante visible. Cette architecture est bien visible sur la Fig. 14 du Las Campanas Redshift Survey (LCRS). La dimension des bulles est de l'ordre de 50 Mpc, les "parois" ne dépassant pas 5 Mpc. C'est une distribution étonnante, mais qui est bien reproduite par les simulations numériques. L'effet de la gravitation dans le mécanisme de structuration est prépondérant.

On peut aller encore plus loin. Le relevé spectroscopique le plus récent du 2dF, et qui n'est pas encore achevé, atteint des distances 5 fois plus élevées que le LCRS. La Fig. 15 révèle la distribution des galaxies sur des échelles cosmologiques (le Gpc). Cette image spectaculaire montre que la structuration persiste même à grande distance, mais que

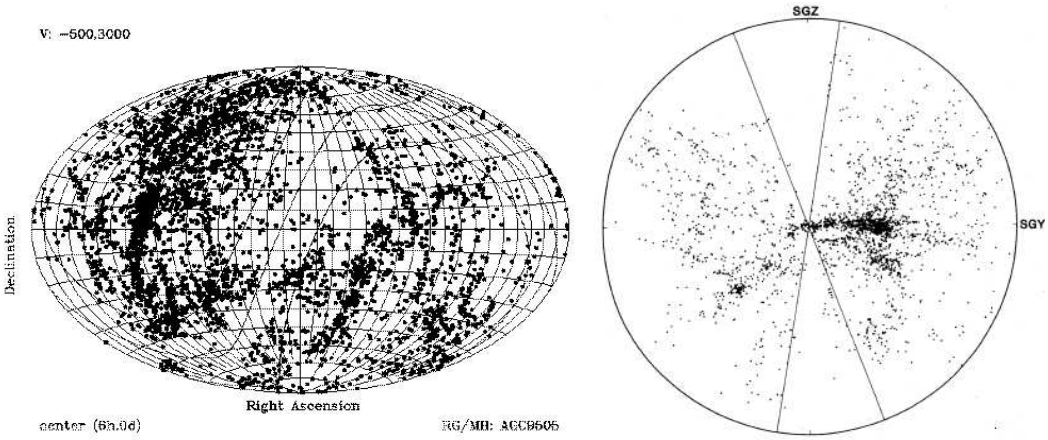

Figure 11.: *Le SuperAmas Local : à droite, carte du Superamas Local projeté sur le ciel. Chaque point représente une galaxie dont la vitesse de récession est inférieure à 3000 km/sec (soit environ 50 Mpc). Les lignes tracées sur cette carte montrent la position du plan de la Galaxie. On voit clairement une asymétrie dans la distribution des points. Elle reflète le fait que notre Groupe Local est situé au bord du Superamas Local et donc, lorsqu'on regarde vers le centre du superamas on voit bien plus de galaxies que dans la direction opposée. La distribution des galaxies du Superamas Local est a peu près centrée sur l'amas de galaxies Virgo. On voit que cette distribution forme un filament et donc notre Superamas Local forme une structure aplatie, le Plan Supergalactique. L'image de gauche l'illustre parfaitement. Le Plan Supergalactique est représenté avec 2175 galaxies positionées en coordonnées supergalactiques (SGX, SGY) dans un cercle de 50 Mpc. Le centre est la position de la Voie Lactée qui apparaît indiscutablement décentrée. Les deux cônes verticaux montrent la position de la zone d'extinction produite par les poussières de notre Galaxie (zone of avoidance).*

le contraste diminue très sensiblement au-delà des échelles dépassant 100 Mpc. Il est cependant prématuré d'en conclure fermement que la distribution à très grande échelle des galaxies est homogène car le relevé est encore trop partiel et morcelé. En revanche, il est clair que la distribution des galaxies selon les lignes de visée est isotrope.

Caractérisation de la structuration. Sous l'effet de la gravitation, les galaxies tendent à se regrouper. Cette tendance (en anglais, le *clustering*) modifie progressivement la distribution à grande échelle de la matière. La description de ses propriétés actuelles (voir par exemple la Figure 16) permet d'établir un diagnostic sur l'histoire et les mécanismes de la for-

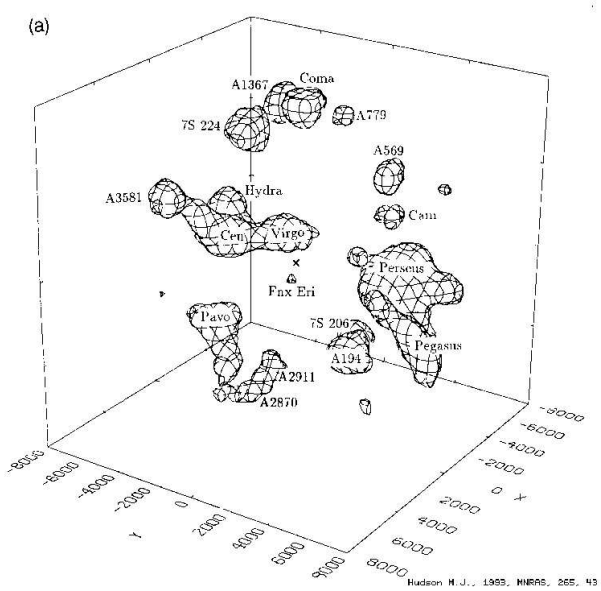

Figure 12.: *Représentation tri-dimensionnelle du voisinage de la Galaxie constituant le Superamas Local. Les mailles illustrent les zones à forte densité de galaxies. On remarque la grande hétérogénéité de notre environnement, notamment les immenses vides qui dominent le volume.*

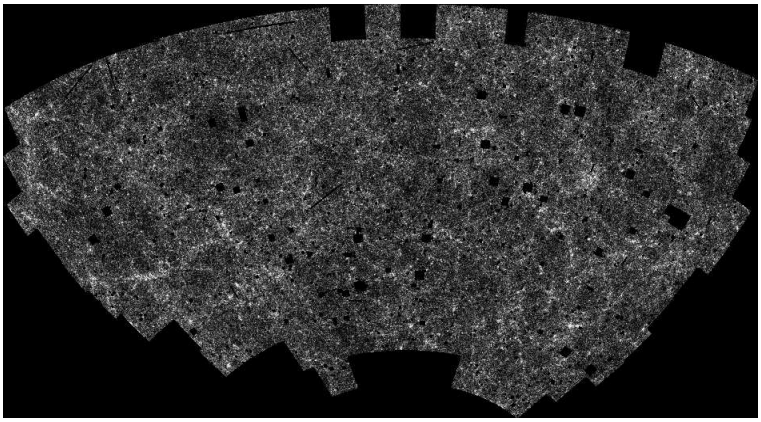

Figure 13.: *Image des 2 millions de galaxies du relevé APM. Cette cartographie bidimensionnelle montre que la distribution projetée des galaxies est fortement hétérogène et contrastée. Les zones les plus denses (blanches) correspondent aux amas de galaxies les plus riches. L'APM couvre 4300 degrés carrés, soit 10% du ciel, jusqu'à la magnitude apparente* $B = 22$.

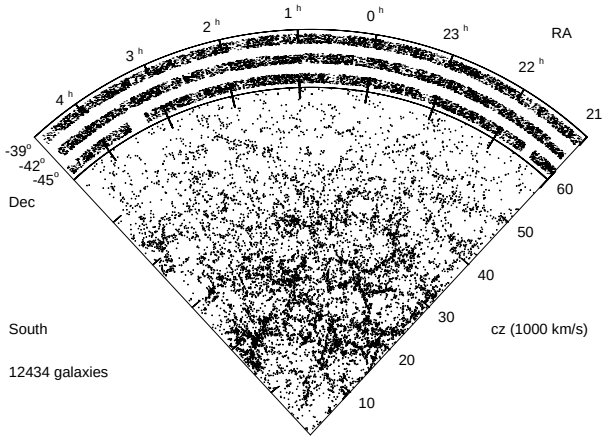

Figure 14.: *Distribution des 12000 galaxies d'une partie du LCRS (1996). Dans ce diagramme en cône, l'observateur est au sommet et les objets sont vus selon leur position le long de la ligne de visée. Les galaxies forment des filaments plongés dans d'immenses vides. La structuration est très hétérogène (d'après Shectman et al 1996, ApJ 470, 172).*

mation des structures et sur la nature de la matière noire.
On admet que la cartographie de la distribution des galaxies permet en principe de caractériser la topologie des structures. C'est une hypothèse dont la validité est discutable car les relations physiques entre galaxies et matière ne sont pas établies solidement.
Le tout premier estimateur statistique décrivant les propriétés de la distribution des galaxies est la fonction d'autocorrélation, ou plus précisément la *fonction de corrélation à 2 points*. Elle décrit l'excès de probabilité de trouver une galaxie à une distance r d'une galaxie sélectionnée au hasard dans le champ d'observation, par rapport à une distribution aléatoire uniforme. C'est donc aussi la probabilité de trouver simultanément une galaxie dans un élément de volume $\mathrm{d}V_1$ et une autre galaxie dans un élément de volume disjoint $\mathrm{d}V_2$ et séparé d'une distance r de $\mathrm{d}V_1$. Dans

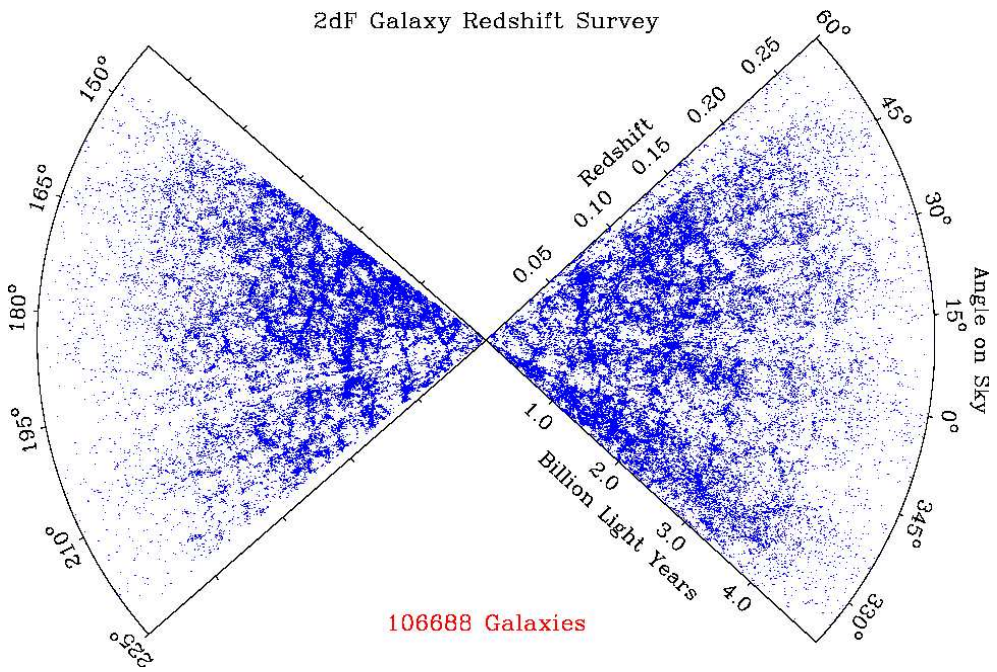

Figure 15.: *Distribution des galaxies du 2dF telle qu'elle apparaissait en juin 2000. On franchit une étape en volume par rapport aux catalogues précédents avec environ 100000 galaxies. Le catalogue final en comportera 250000. La structuration est toujours visible, mais le contraste s'atténue très sensiblement sur des échelles dépassant 100 Mpc. On s'approche d'une distribution uniforme. On remarque par ailleurs qu'aucune anisotropie n'est visible : aucun sous-cône visible sélectionné par la pensée dans cet échantillon ne semble différent des autres.*

le cas d'une distribution de Poisson, cette probabilité est

$$\mathrm{d}P = \bar{n}^2 \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 \ , \tag{39}$$

où $\bar{n}$ est la densité numérique moyenne de galaxies. Si la distribution n'est pas Poissonnienne, cette probabilité s'écrit :

$$\mathrm{d}P = \bar{n}^2 \left[1 + \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right] \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 \ . \tag{40}$$

ξ est la corrélation entre ces points. Si $\xi > 0$, les points sont corrélés, et ξ exprime la tendance au regroupement des galaxies. Inversement, si $\xi < 0$, il y a anti-corrélation.
Pour un univers homogène,

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{41}$$

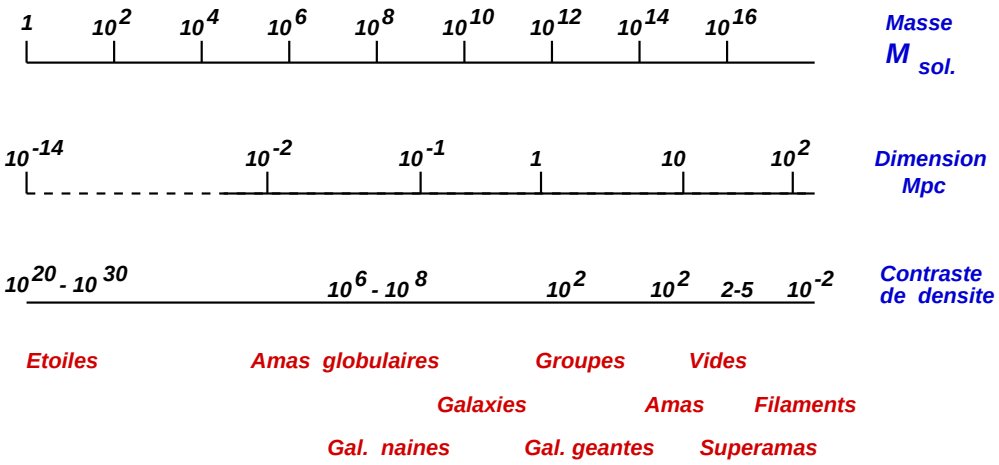

Figure 16.: *Tableau synthétique des échelles caractériques des structures constituant l'Univers visible.*

et pour un univers isotrope

$$\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \xi\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right) = \xi(r). \tag{42}$$

La fonction de corrélation à deux points des galaxies doit en principe contenir une information sur le champ de matière. Pour un champ de densité continu $\rho(\mathbf{r})$

$$\xi(r) = \frac{\left\langle \left(\rho\left(\mathbf{u}\right) - \bar{\rho}\right)\left(\rho\left(\mathbf{u}+\mathbf{r}\right) - \bar{\rho}\right)\right\rangle}{\bar{\rho}^2}\ , \tag{43}$$

où $\bar{\rho}^2$ est la densité moyenne dans une boite de volume V. En suposant que les galaxies ont en moyenne toute la même masse $\langle M_g \rangle$ on a donc

$$\mathrm{d}P = \bar{n}^2\left[1 + \xi(r)\right]\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2 = \frac{\left\langle \rho\left(\mathbf{x_1}\right)\mathrm{d}V_1\ \rho\left(\mathbf{x_2}\right)\mathrm{d}V_2\right\rangle}{\langle M_g\rangle^2} \tag{44}$$

ce qui signifie que la fonction de corrélation à deux points donne directement la fonction d'autocorrélation de la distribution de matière. Dans cette hypothèse, la fonction de corrélation à deux points des galaxies permet de reconstruire le spectre de puissance du champ de densité.
Soit $\delta\left(\mathbf{x}\right)$ l'excès de masse au point $\mathbf{x}$,

$$\delta\left(\mathbf{x}\right) = \frac{\rho\left(\mathbf{x}\right) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}\ . \tag{45}$$

On peut décomposer ce champ de densité dans l'espace de Fourier :

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V}\int \delta\ e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\mathrm{d}^3x\ , \tag{46}$$

et par conséquent

$$\xi(r) = \int |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \; e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} \mathrm{d}^3k \; . \tag{47}$$

La fonction de corrélation à deux points est donc directement la transformée de Fourier du spectre de puissance $P(k)$. Les mesures de ces deux quantités font partie des activités principales des relevés cosmologiques car il se trouve qu'elles caractérisent complétement les propriétés d'un champ aléatoire gaussien.
Il reste cependant à vérifier que cette relation simple entre matière et galaxie est valide. C'est une question fondamentale de la cosmologie actuelle. Ce problème exprime clairement la difficulté d'établir la relation entre les galaxies (ou la lumière) et la matière. On caractérise ce lien par un paramètre, le *biais* b, qui est le rapport du contraste de densité numérique de galaxies au constrate de densité de matière :

$$b = \left(\frac{\delta n}{\delta \delta} \right) \; . \tag{48}$$

En pratique, la fonction de corrélation est calculée en mesurant l'excès local du nombre de paires de galaxies par rapport à une distribution aléatoire :

$$\xi(r) = \frac{N_{obs}(r)}{N_{alea}(r)} - 1 \; , \tag{49}$$

où les N_i sont des nombres de paires du catalogues et dans un catalogue fictif de galaxies distribuées aléatoirement dans un volume $r \pm \delta r/2$.
L'étude statistique des catalogues montre que la fonction de corrélation des galaxies est bien représentée par une loi de puissance :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \; . \tag{50}$$

Sur des échelles inférieures à 10 h^{-1} Mpc, $\gamma = 1.8$ et $r_0 = 5h^{-1}$ Mpc. Au-delà de 10 h^{-1} Mpc, la fonction de corrélation s'effondre rapidement. Cette loi d'échelle est fondamentale pour construire des modèles de formation de structures.
En pratique, les données immédiates des catalogues du ciel portent sur les propriétés projetées. Pour examiner le regroupement des galaxies dans ces catalogues, on utilise la fonction de corrélation angulaire, $\omega(\theta)$, qui est définie naturellement par simple analogie :

$$\mathrm{d}P = \bar{N}^2 \, [1 + \omega(\theta)] \, \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \; , \tag{51}$$

où $d\Omega_i$ sont les éléments d'angle solide de deux régions disjointes. On peut montrer que si la fonction de corrélation $\xi(r)$ est une loi de puissance d'indice $\gamma > 0$, alors la fonction de corrélation angulaire est aussi une loi de puissance d'indice $1-\gamma$. Plus précisément, si

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \tag{52}$$

alors, pour des petits angles θ, $\omega(\theta)$ s'écrit (voir Annexe A) :

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^{\gamma} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{1}{\left[\int_0^\infty u^2\Phi(u)\mathrm{d}u\right]^2}\right] \int_0^\infty u^{5-\gamma}\Phi^2(u)\mathrm{d}u \ , \tag{53}$$

où

$$u = \frac{r}{D} \ , \tag{54}$$

D caractérisant la profondeur du relevé et Φ étant la *Fonction de sélection* des galaxies. Cette fonction exprime les propriétés du relevé et les caractéristiques du catalogue de galaxies sélectionnées pour la mesure. Par exemple, pour un relevé limité en flux jusqu'à f_{lim}, les galaxies de luminosité L visibles sont dans une sphère de rayon limite

$$D = \left(\frac{L}{4\pi f_{lim}}\right)^{1/2} \ . \tag{55}$$

Dans le cas d'un catalogue parfaitement homogène dont les galaxies auraient toute la même luminosité L alors

$$\Phi = \ 1 \text{ pour } r < D \tag{56}$$

$$= \ 0 \text{ pour } r > D \, . \tag{57}$$

Cette expression montre que la fonction de corrélation angulaire décroît lorsque le relevé est de plus en plus profond. C'est donc un pur effet de dilution du signal par effet de projection.
La figure 18 montre la forme de la fonction de corrélation angulaire de l'APM et la fonction de corrélation spatiale du relevé Point Source Catalogue redshift survey (PSCz) établi à partir du catalogue de galaxies du satellite infrarouge IRAS.

2.3 Propriétés des amas de galaxies

Les amas de galaxies sont les systèmes dynamiques les plus massifs et les plus étendus qui présentent des propriétés de systèmes gravitants (partiellement) relaxés. Au-delà, aucune des structures dynamiques

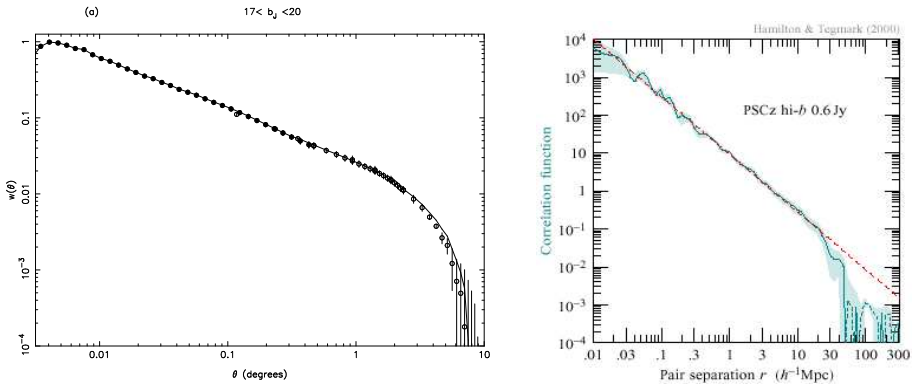

Figure 17.: *A droite, fonction de corrélation angulaire du relevé photométrique APM montrant le regroument des galaxies de la carte bidimensionnelle de la figure 13. L'analyse porte sur deux millions de galaxies projetées sur le ciel (d'après Maddox et al 1990, MNRAS 242, 43p). A gauche la fonction de corrélation tri-dimensionnelle du relévés PSCz qui porte sur 15400 galaxies avec un décalage spectral mesuré (d'après Sutherland et al 1999, MNRAS 308, 289).*

connues n'est encore parvenue à cette phase avancée d'évolution dynamique. Cette particularité place les amas des galaxies dans une position centrale. Plus précisément, les amas de galaxies sont les blocs de la structuration à grande échelle de l'Univers qui ont conservé la mémoire de l'histoire de leur formation et de leur évolution au sein des grandes structures. C'est la raison pour laquelle ce sont des objets clefs en cosmologie. En fait, les simulations numériques montrent que le nombre et l'état d'évolution des amas de galaxies varient fortement avec le décalage spectral (le temps, donc). Ces propriétes peuvent donc être utilisés pour confronter les scénarios cosmologiques aux observations.

Propriétés internes. Les amas de galaxies ont des dimensions caractéristiques de 1 à 10 Mpc. Ils sont composés de galaxies (typiquement de l'ordre du millier, voire dix-mille, ce nombre dépendant de la fraction de galaxies naines qui est mal connue), de gaz intergalactique ionisé confiné dans l'amas et dont la température est d'environ 10^8 K, et de matière noire.
Les amas présentent en général des morphologies complexes et sont constitués de sous-systèmes, vraisemblablement en forte interaction ou en cours de fusion. Ce sont des indications que les amas de galaxies sont des systèmes dynamiquement jeunes. C'est bien ce que révèlent les grands relevés tridimensionnels des galaxies qui permettent de placer les amas dans cette gigantesque architecture à l'intersection de filaments

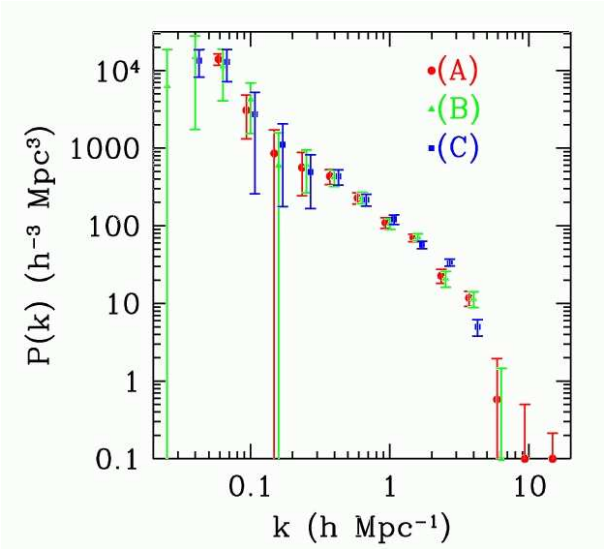

Figure 18.: *La fonction de corrélation tridimensionnelle du SDSS mesurée à partir de redshifts photométriques de 1.5 millions de galaxies permet de reconstruire avec une précision inégalée le spectre de puissance des galaxies. Cette figure remarquable préfigure les résultats futurs de ce relevé qui porteront sur 100 millions de redshifts photométriques et deux millions de galaxies (d'après Dodelson et al 2001, astro-ph/0107421).*

et/ou des bulles (voir Fig. 19). Progressivement, les galaxies périphériques plongent dans le puits de potentiel central en suivant d'immenses flots de galaxies. Cette représentation, qui est aussi bien visible dans les simulations numériques (Fig. 20), montre que les zones externes des amas ne constituent pas des systèmes isolés et ne sont pas sphériques. Leur modélisation est donc particulièrement complexe.

Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas. De la même façon que pour les galaxies, on peut tenter de mesurer le regroupement des amas de galaxies par la fonction de corrélation amas-amas. Techniquement, c'est cependant beaucoup plus difficile car le nombre d'amas est considérablement plus faible que le nombre de galaxies.

Pour évaluer la densité d'amas de galaxies, il faut préciser la *profondeur* des catalogues car c'est ce paramètre qui définit le volume couvert. Ainsi jusqu'à la magnitude apparente $I = 24$, les estimations à partir des catalogues actuels donnent 15 amas par degrés carrés. Le ciel couvrant 40000 degré-carrés, de l'ordre de $5\times\ 10^5$ à 1×10^6 amas couvrent le ciel jusqu'à ces magnitudes. À cette profondeur, on atteint les amas de galaxies jusqu'à $z = 1$ et par conséquent la densité d'amas de galaxies est de l'ordre

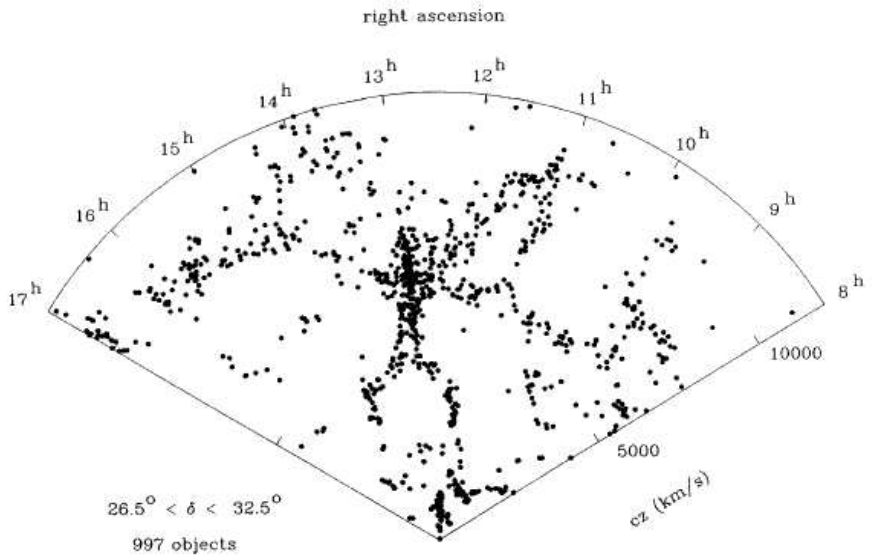

Figure 19.: *Image de la distribution des galaxies du catalogue spectroscopique du Center for Astrophysics (CfA). Comme les autres diagrammes en cône, l'observateur est au sommet et les objets sont vus selon leur disposition le long de la ligne de visée (en profondeur). On voit au nettement des régions vides et la disposition remarquable des galaxies (points noirs). A l'intersection des "bulles" centrales se trouve une très forte concentration de galaxies. Il s'agit de l'amas de galaxies Coma (z=0.023) (d'après de Lapparent, Geller & Huchra 1986, ApJ 302, L1).*

de $10^{-5}\ h^3\ \mathrm{Mpc}^{-3}$. À titre de comparaison, à cette profondeur il y a dans le ciel environ 10^{10} galaxies.
Il n'existe pas pour le moment de grands catalogues d'amas de galaxies rigoureusement construits permettant de produire des analyses statistiques robustes. La mesure de la fonction de corrélation amas-amas est donc actuellement incertaine. L'arrivée de nouveaux grands échantillons, produits par les relevés SDSS et le satellite XMM notamment, devrait permettre un formidable bond en avant dans ce domaine.
Avec les données actuelles, il semble que la fonction de corrélation amas-amas, ξ_{cc} suive une loi identique à celle des galaxies (voir figures 21 et 22) :

$$\xi_{cc}(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1.8} , \qquad (58)$$

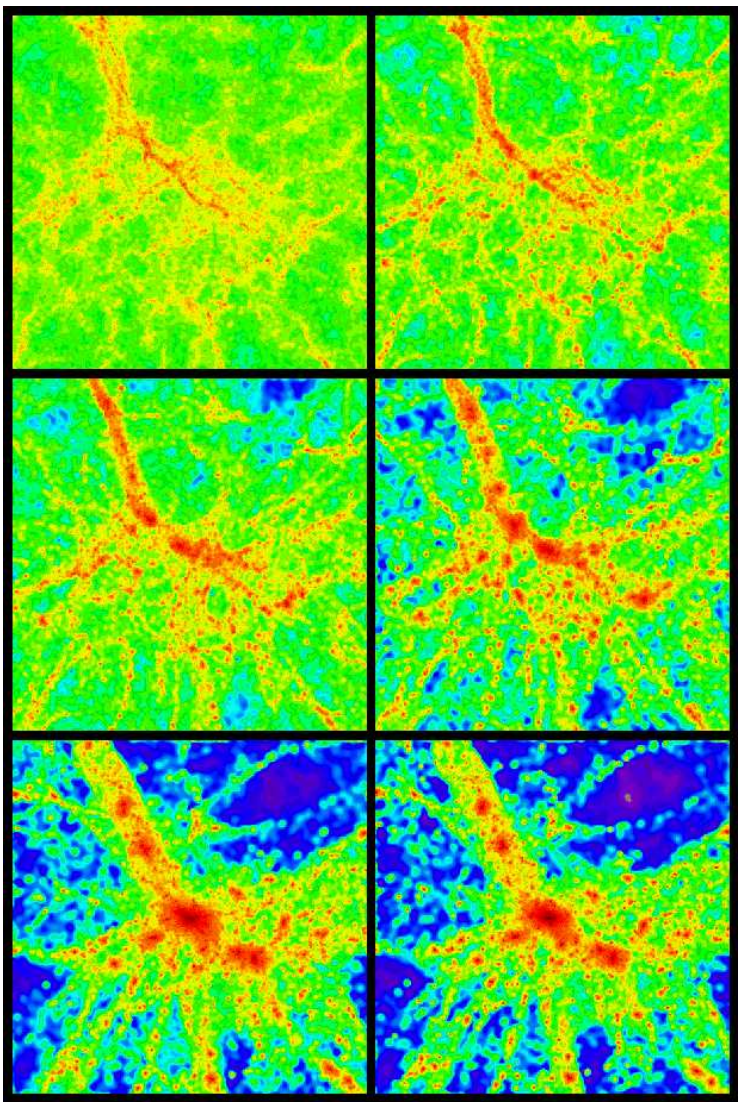

Figure 20.: *Simulations numériques représentant la formation d'amas de galaxies au cours du temps. A gauche, simulation d'un scénario cosmologique d'univers dominé par de la matière noire froide avec* $\Omega_m = 1; \Omega_\Lambda = 0$ *(c'est à dire 100% de la densité d'énergie est matérielle, 0% sous forme de densité d'énergie du vide ; nous rediscuterons le sens des paramètres cosmologiques dans la suite du cours), à droite un modèle de matière froide dans un univers a constante cosmologique non-nulle,* $\Omega = 0.3; \Omega_\Lambda = 0.7$*. Le temps progresse du haut vers le bas (de haut en bas :* $z = 2, 1, 0$*). Mais les boites sont de dimensions différentes (*$21 \times 21 \times 8$ *Mpc*^{3} *à gauche contre* $35 \times 35 \times 13$ *Mpc*^{3} *à droite). Ces deux scénarios montrent une grande différence dans l'état d'évolution de l'amas en fonction du décalage spectral. Mais dans chacun d'eux la structure filamentaire des amas est indiscutable. Le cœur de la structure est dense, plutôt compact et son état dynamique est très avancé.*

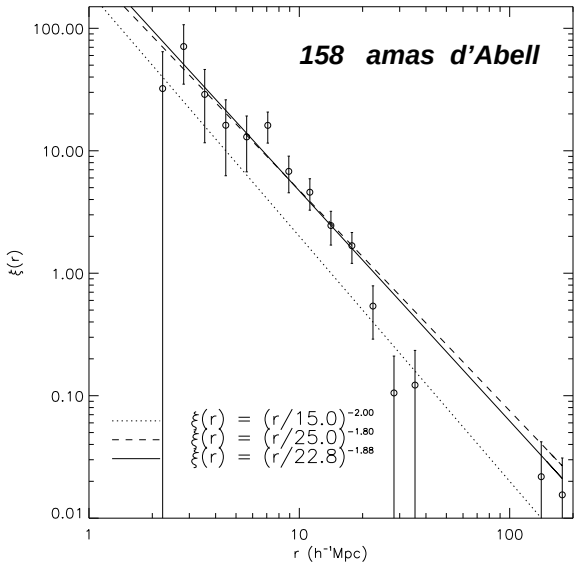

Figure 21.: *Fonction de corrélation tri-dimensionnelle amas-amas d'un échantillon limité en volume de 158 amas du catalogue d'Abell (d'après Miller et al 1999, ApJ 523, 492). Les 3 droites représentent les ajustements de fonction en loi de puissance.*

avec $r_0 = 24h^{-1}$ Mpc. Cette loi est bien suivie entre les échelles de 3 à 100 Mpc. Mais il faut insister sur le fait que les catalogues ne contiennent que quelques centaines d'amas de galaxies.

2.4 Propriétés du gaz intergalactique

L'analyse du gaz intergalactique est un moyen de comprendre l'histoire des baryons dans l'univers et d'explorer les scénarios possibles à l'origine de l'effondrement des baryons et de la formation des étoiles dans les galaxies. C'est un problème difficile et qui est aujourd'hui à la pointe des recherches en cosmologie et astrophysique extragalactique.
Nous avons déjà évoqué l'existence d'un gaz chaud dans les amas de galaxies. Nous savons, par les raies d'émission du gaz, que l'abondance en métaux du gaz intra-amas est demi-solaire. On explique cette composition par un enrichissement venant directement des ejecta des supernovae des galaxies de l'amas. Une fraction du gaz est vraisemblablement d'origine primordiale et est confinée depuis la formation de l'amas dans son puits de potentiel.
Il existe aussi du gaz intergalactique qui n'est pas confiné dans des systèmes gravitants. Sa présence est révélée dans les spectres des qua-

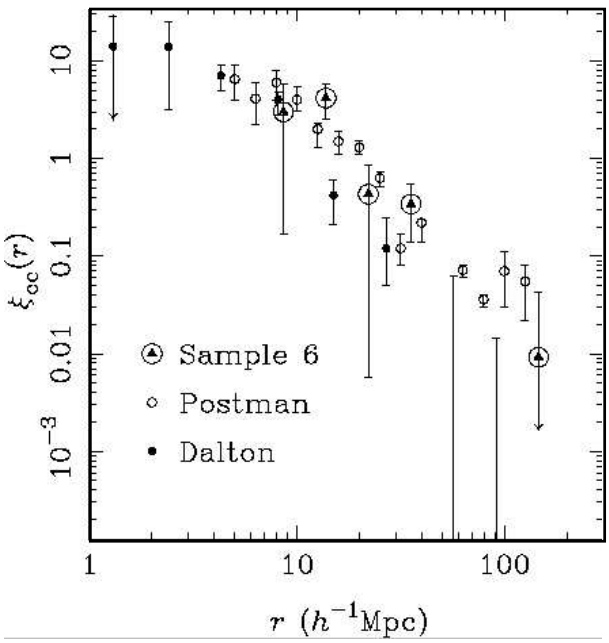

Figure 22.: *Fonction de corrélation tri-dimensionnelle amas-amas des trois échantillons différents d'amas de galaxies. Les résultats semblent stables en dépit de la disparité des catalogues et du petit nombre d'amas contenu dans chaque relevé.*

sars à grand redshift qui montre une multitude de raies d'absorption très étroites (quelques km.sec^{-1}) de largeur en-deça de la raie Ly-α (λ1216 $\mathring{A}$. Ces raies sont produites par les nuages absorbants situés le long de la ligne de visée à tous les redshifts. Le nombre impressionnant des raies visibles sur la figure 23 démontre qu'il existe des nuages en très grand nombre dans le milieu intergalactique. Ces nuages constituent les éléments de ce que l'on appelle la *forêt Lyman-α*. Les densités de colonne[7] des nuages de la Forêt Lymanα sont de l'ordre de $10^{13} - 10^{15}$ cm^{-2}. Potentiellement il s'agit d'un énorme réservoir de baryons (voir Figure 25) et il est donc crucial de comprendre la quantité de gaz qu'ils contiennent, comment ils se distribuent dans l'espace, comment la fraction de gaz des nuages évolue avec le temps et quel est leur couplage avec la formation des galaxies. Par ailleurs, pour la compréhension des mécanismes de structuration de l'univers, ces nuages présentent l'avantage d'être des traceurs des grandes structures plus simples que les galaxies. En effet, comme il s'agit du gaz d'hydrogène extragalactique, ils sont moins affectés que les galaxies par

[7] c'est à dire la densité de matériau projetée sur la ligne de visée

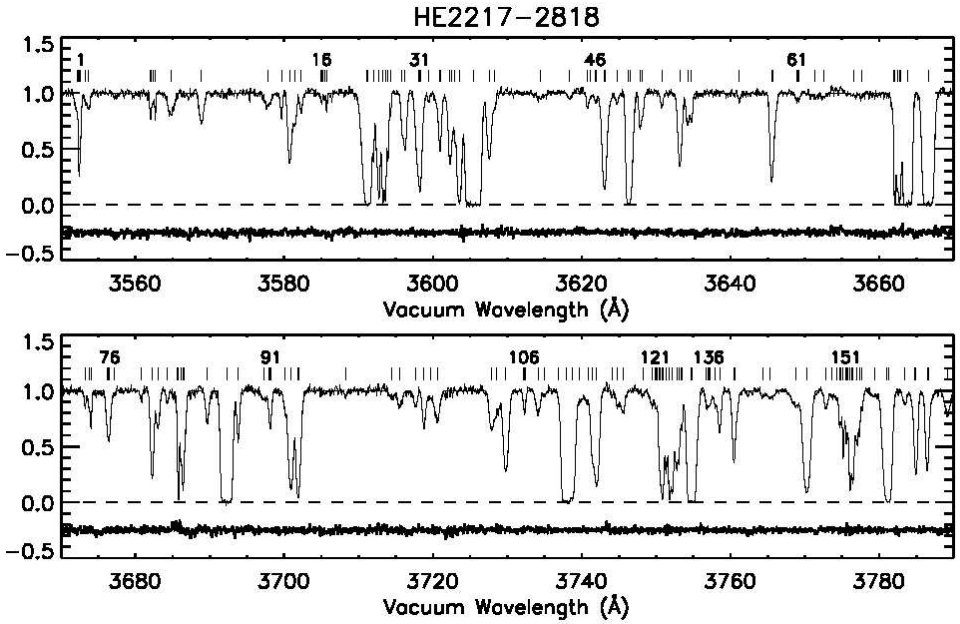

Figure 23.: *Spectre haute résolution obtenu avec le spectrographe UVES du VLR ($R = 45000$) du quasar HE2217-2818. Les raies d'absorption sont les nuages de la forêt Ly_α. Les traits verticaux indiquent la position des nuages absorbants situés le long des deux lignes de visée. Le spectre a été superposé avec un ajustement de profil de Voigt. Le résidu est montré en bas de chaque panneau (d'après Kim et al 2001, A&A 373, 757).*

les mécanismes complexes conduisant à la formation d'étoiles et donc par les effets de biais qui relient la lumière à la matière.
La distribution en densité de colonne des nuages est très dispersée. Les cas extrêmes sont les systèmes amortis (*Damped Lyman-α* ou DLA) ou Lorentziens dont les raies saturées par la quantité d'hydrogène montrent qu'ils atteignent des densités de colonne de 10^{20}-10^{22} cm^{-2} (voir Figure 24). Les observations montrent que le nombre de nuages absorbants par intervalle de décalage spectral évolue selon la loi empirique :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} \propto (1+z)^{2.3} \tag{59}$$

ce qui, compte tenu de l'accroissement de densité en fonction du décalage spectral, donne la loi d'évolution

$$n_{comobile} \propto (1+z)^{\gamma} \tag{60}$$

où $\gamma > 1$ et dépend des paramètres cosmologiques. Dans tous les cas, les nuages étaient donc plus nombreux et/ou avaient une plus grande section

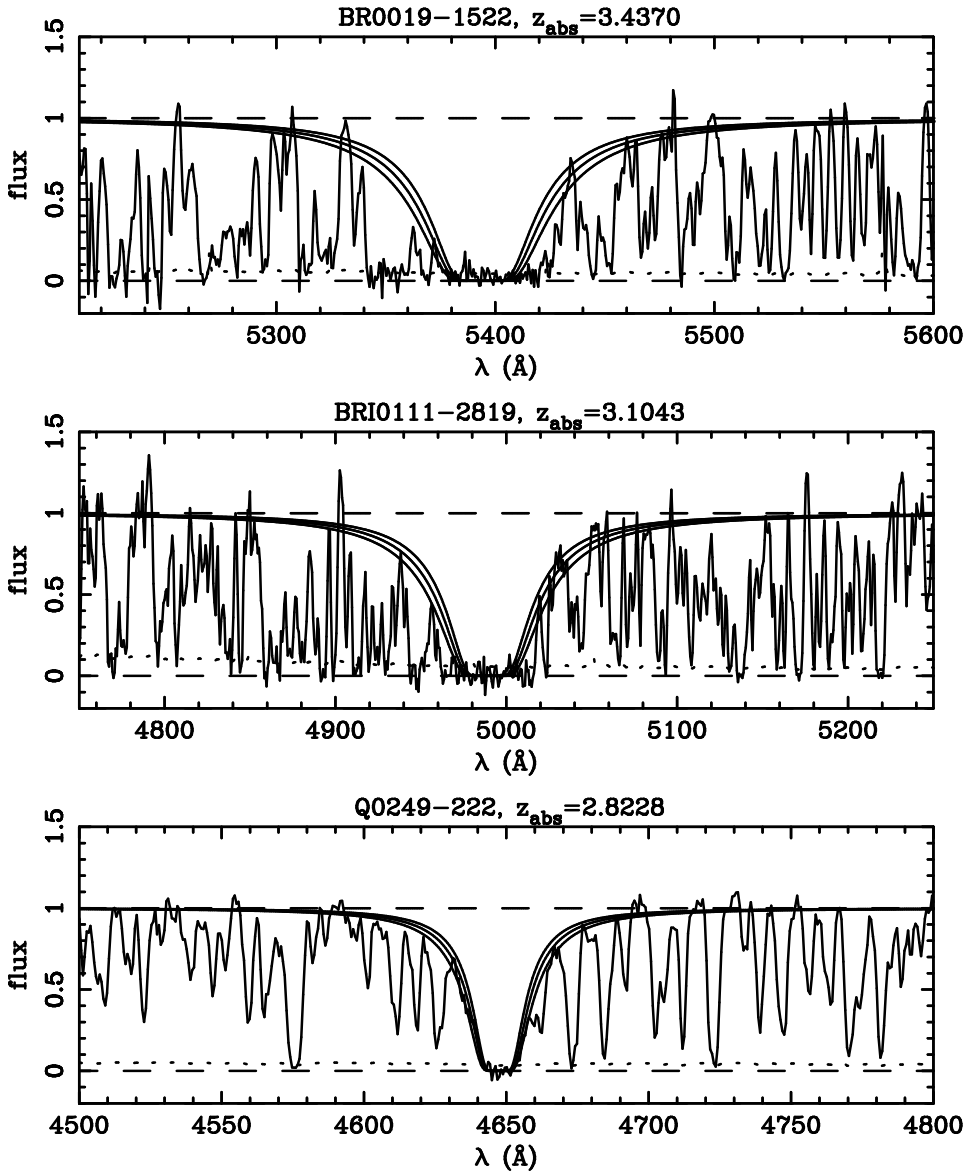

Figure 24.: *Spectres de quasars montrant des raies d'absorption saturées produites par les systèmes à grande densité de colonne (d'après Storrie-Lombardi et Wolfe 2000, ApJ 543, 552).*

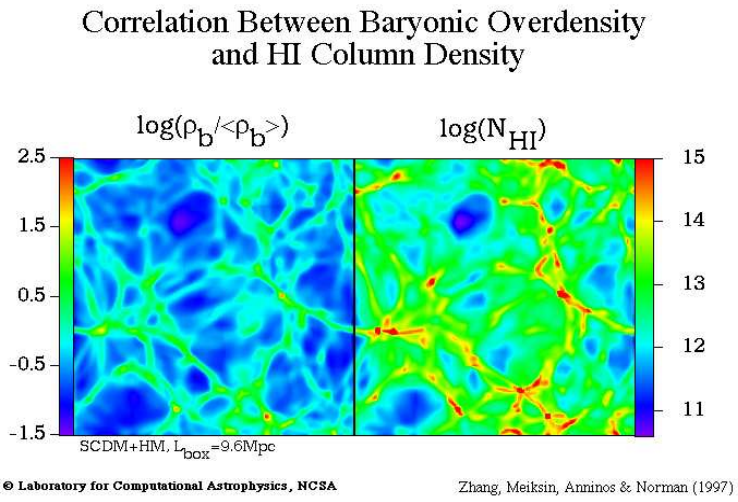

Figure 25.: *Corrélation entre l'excès de baryon dans les nuages et la densité de colonne de gaz HI.*

efficace à grand décalage spectral.
La dimension de ces nuages dans la direction perpendiculaire à la ligne de visée est estimée en étudiant les raies d'absorption dans les champs à quasars multiples, en corrélant la distribution des nuages Lyman-α dans les spectres de chaque quasar. Les résultats sont très dispersés (entre 5 et 300 kpc !). Cependant il semble que les nuages de la forêt Lyman$-\alpha$ ont des propriétés communes. Ils

- sont de grande dimension ($\approx$ 100 kpc),
- plutôt aplatis,
- ne présentent pas d'évolution de dimension avec le temps,
- sont corrélés sur des échelles de 1 Mpc.

La représentation donnée par les observations et les simulations numériques est illustrée sur la figure 25. Les nuages Lyman-α constituent un tissu filamentaire (peut-être de nappes minces) qui suit la distribution de matière et dont les intersections sont les lieux de formation de galaxies.

La mesure de l'abondance d'hydrogène et des métaux dans ces nuages est essentielle pour comprendre l'histoire de la formation stellaire dans l'Univers. C'est techniquement difficile car ces nuages sont ionisés par le flux ionisant des quasars et des galaxies en formation. On peut

montrer que la masse de ces systèmes est de l'ordre de

$$M_{FLy} \approx 1.2 \times 10^3 \left(\frac{L}{10 \text{ kpc}}\right)^2 h^{-2} \mathrm{M}_\odot \ , \tag{61}$$

et

$$M_{DLA} \approx 10^{10} \left(\frac{L}{300 \text{ kpc}}\right) h^{-2} \mathrm{M}_\odot \ , \tag{62}$$

où FLy se rapporte à la forêt de Lyman et DLA aux systèmes amortis. Pour évaluer la masse totale incluse dans ces systèmes, on ajuste le nombre de raies par intervalle de redshift avec une loi du type

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = B\,(1+z)^\gamma \ . \tag{63}$$

Pour les nuages de densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14}$ cm^{-2}, une très forte évolution est observée au-delà de $z \sim 1.5$. Comme le montre la figure 26, $\gamma \approx 2.2$ et $B \approx 9$.. La fraction de baryons observée dans ces systèmes est compatible avec l'hypothèse que plus de 90% des baryons résident dans la forêt Ly_α à $1.5 < z < 4$.

La distance propre entre deux nuages de la forêt Lyα est donc

$$D_{LyF} = \frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z\mathrm{d}N} \approx 0.6\ \Omega^{-1/2}\ h^{-1} Mpc \tag{64}$$

De la même façon, pour les systèmes amortis la distance propre internuage est

$$D_{DLA} = 300\ \Omega^{-1/2}\ h^{-1} Mpc \tag{65}$$

On peut montrer alors qu'à grand redshift ($2 < z < 3$), la contribution à la masse d'hydrogène des systèmes amortis est très grande et est équivalente à celle des galaxies. Par contre, à $z = 0$ cette contribution est dix fois plus faible (voir Figure 27). La diminution semble progressive avec le décalage spectral. Ce sont des indications très fortes que ces grands nuages sont des précurseurs de nos galaxies actuelles.

2.5 Propriétés statistiques des quasars

Notre connaissance des propriétés de regroupement des quasars est encore limitée car la taille des catalogues est sans commune mesure avec celle des galaxies. Le premier catalogue vraiment imposant est en cours de constitution avec le relevé 2dF. La figure 28 et ses 6000 quasars est déjà une révolution en soi qui présage d'importants bouleversements dans notre connaissance des quasars et de l'univers à grande échelle. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la profondeur de l'échantillon par rapport à tous les relevés de galaxies discutés auparavant.

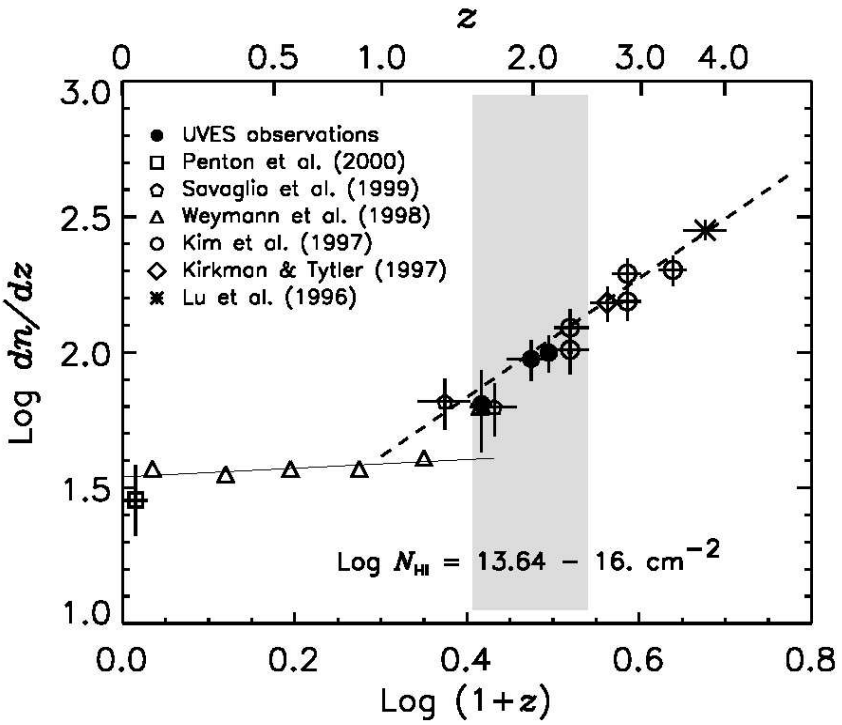

Figure 26.: *Une compilation des données montrant l'évolution de la densité numérique de nuages Ly_α en fonction du redfshift pour les systèmes dont la densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14}$ cm^{-2}. Jusqu'à $z \sim 1.6$ la pente $\gamma \approx 0.16$, alors qu'une montée abrupte est observée pour $z > 1,6$. La pente moyenne atteint $\gamma \approx 2.2$ (d'après Kim et al 2001, A&A 373, 757).*

Il semble que les quasars aient tendance à se regrouper, au moins sur des échelles $< 10\ h^{-1}$ Mpc, avec une échelle $r_0 = 6h^{-1}\ Mpc$. L'existence des structures cohérentes de quasars sur des échelles de l'ordre de 100 $h^{-1}\ Mpc$ est encore un objet de discussion.
La densité de quasars semble atteindre un pic à $z = 2$ puis décroît fortement. À $z = 4$ elle est 3 fois plus faible qu'à $z = 2$. Ce déclin est observé dans les échantillons optiques et radios. Cependant, le nombre de quasars de décalage spectral ≈ 4 est très faible et il est encore prématuré de donner des valeurs quantitatives précises. Le 2dF et le SDSS, qui ont déjà trouvé un grand nombre de quasars à grand décalage spectral, devraient très vite apporter des informations nouvelles à ce sujet.
Il faut néanmoins souligner que le relevé de quasars du 2dF ne montre aucune structuration à très grande échelle. Ce catalogue montre qu'au-delà de 100 Mpc, l'univers devient homogène et isotrope.

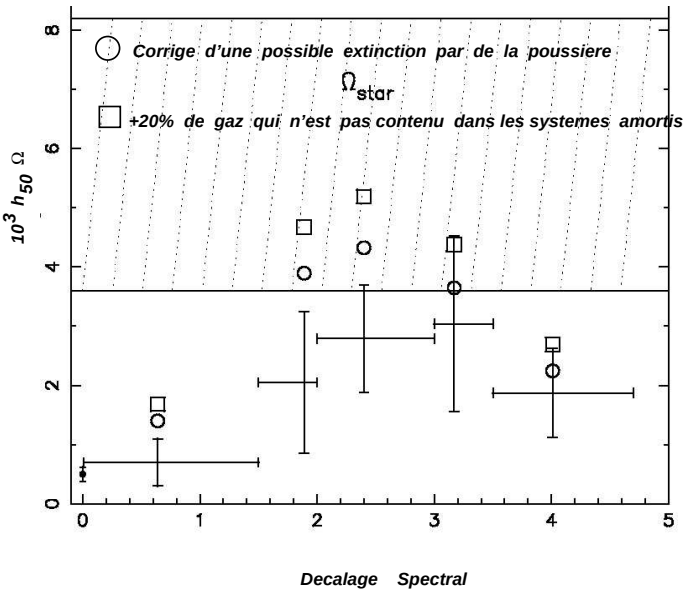

Figure 27.: *Mesure de l'abondance d'Hydrogène dans les nuages intergalactiques en fonction du décalage spectral.*

2.6 Les fonds de rayonnement

Si la matière représente une contribution importante au contenu de l'Univers, ce n'est pourtant qu'une petite fraction vis-à-vis des photons. Les observations radio, infrarouge, visible, UV, X et Gamma montrent qu'il existe dans toutes ces longueurs d'onde un fond diffus de photons qui s'ajoute aux contributions individuelles des objets identifiés dans le ciel (figure 29). Cela ne signifie pas nécessairement qu'il s'agit d'une composante intrinsèquement diffuse car une fraction peut provenir d'objets non résolus. Il est important de souligner que tous ces fonds de rayonnement sont isotropes. Les composantes anisotropes produites par la Galaxie ou le mouvement de la Galaxie vis-à-vis du fond diffus cosmologique (qui crée une composante dipolaire dans la distribution de température du fond à cause du redshift) ont été soustraites au préalable.

Les principales contributions aux fond de rayonnement sont les suivantes :

1. La contribution dominante est le rayonnement fossile détecté accidentellement en 1965 par Penzias et Wilson. Il a été très vite interprété dans un contexte cosmologique. Nous y reviendrons. Le rayonnement fossile constitue plus de 90% de la densité d'énergie sous forme radiative de l'Univers. Les résultats spectaculaires du satellite *COBE* sont connus de tous (voir figure 30). Dans une

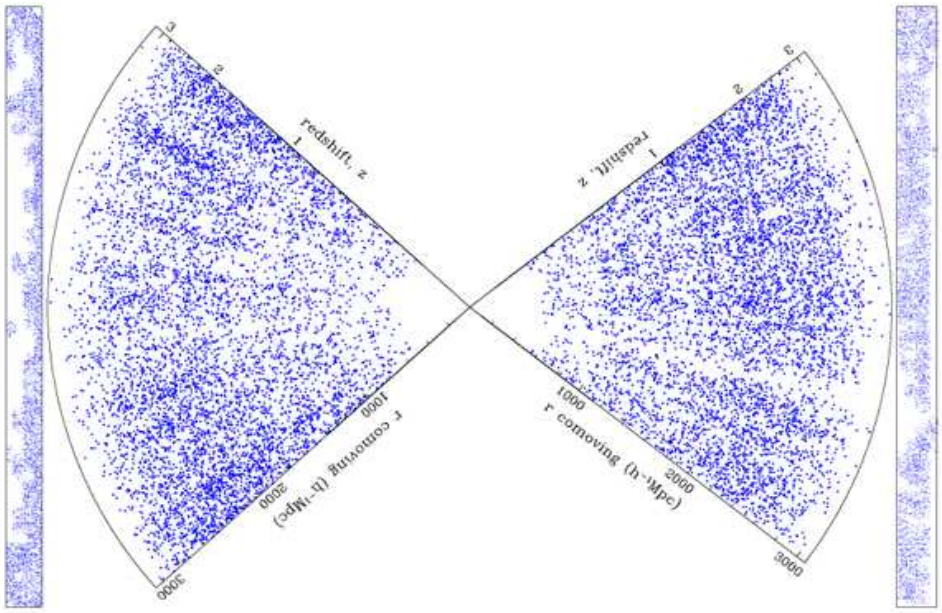

Figure 28.: *Distribution des 13300 quasars du relevé 2dF au 15 juillet 2000. C'est à ce jour le plus grand relevé de quasars jamais construit. Aucune structuration n'est visible. Les petites bandes latérales représentent la disposition de chaque quasar projetée sur le plan du ciel.*

première étape, dès son départ il a permis de démontrer que ce rayonnement suivait un spectre de distribution d'énergie remarquablement identique à celui d'un corps noir de température

$$T_0 = 2.728 \pm 0.004 \ K \ . \tag{66}$$

On peut donc calculer la contribution actuelle du fond diffus à la densité d'énergie de l'univers (exprimée en terme de densité de masse) :

$$\rho_{CMB} = \rho_\gamma c^2 = c^2 \int_0^\infty \rho_\gamma(\nu) \mathrm{d}\nu = c^2 \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_\nu}\right) - 1} \mathrm{d}\nu \tag{67}$$

$$\rho_{CMB} = \frac{\sigma T_0^4}{c^2} = 4.8 \times 10^{-34} \ \mathrm{g.cm^{-3}} \ , \tag{68}$$

où

$$\sigma = \pi^2 k_B^4 / (15 c^3 \hbar^3) = 7.5 \times 10^{-15} \ \mathrm{erg.cm^{-3}.K^{-4}} \tag{69}$$

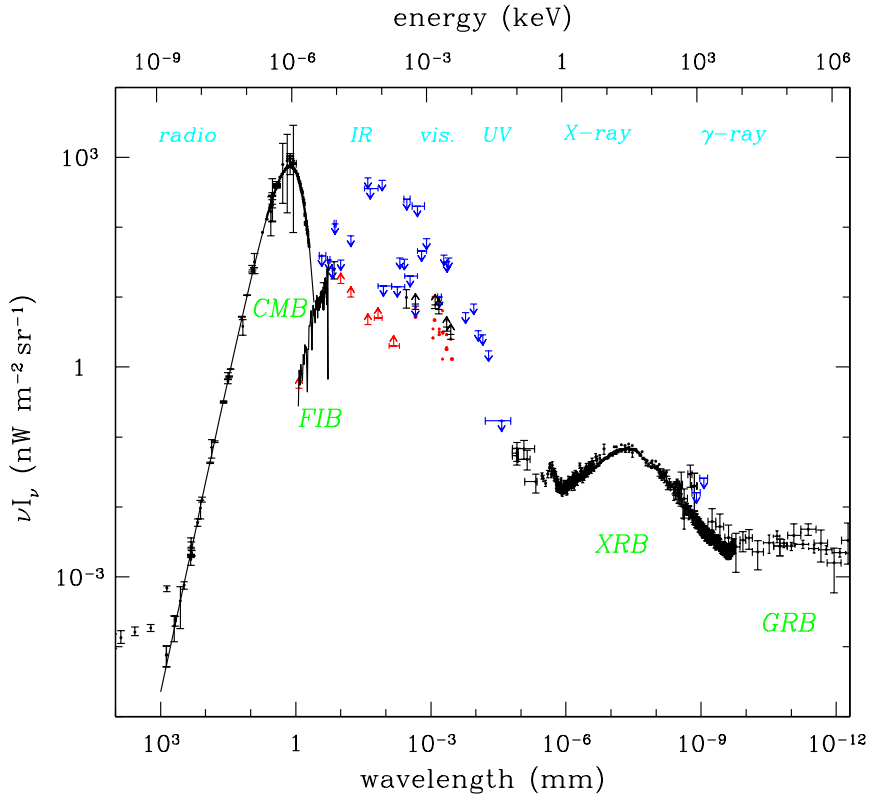

Figure 29.: *Compilation des observations des fonds de rayonnement. Le fond de rayonnement cosmologique micro-onde domine nettement la densité de rayonnement de l'univers. Puis viennent ensuite les contributions infrarouge lointain et visible (d'après Halpern & Scott 1999, ASP Conf. Ser. 181, p. 283).*

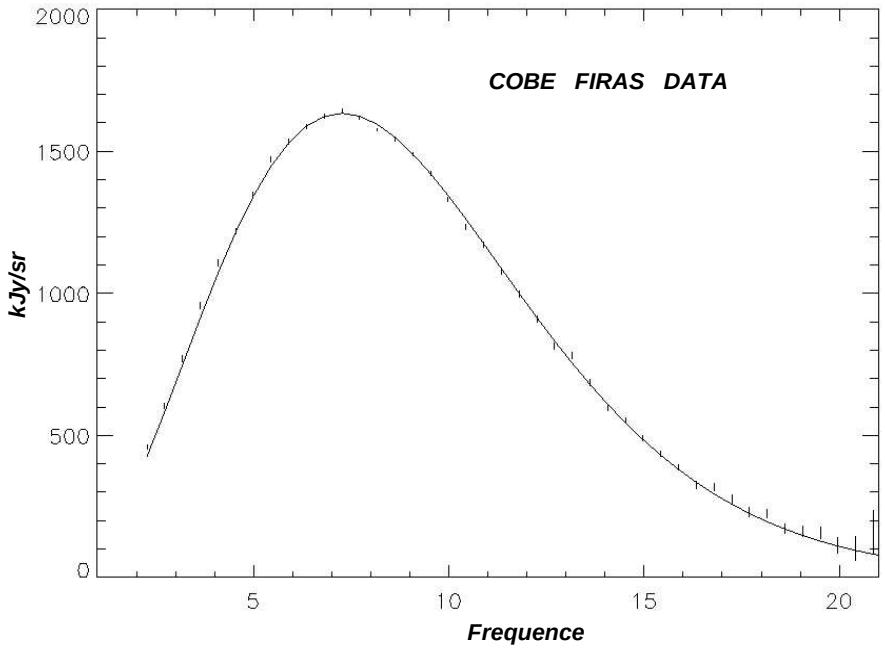

Figure 30.: *Spectre du rayonnement micro-onde cosmologique mesuré par COBE. La comparaison des points de mesure est faite avec un spectre de corps noir à 2.728 K.*

est la constante de Stefan.
On peut calculer aussi la densité numérique de photons

$$n_{CMB} = \int \frac{\rho_\gamma(\nu)}{h\nu} \mathrm{d}\nu \approx 0.4 \frac{\sigma}{k_B} T^3 = 20.4\ T^3\ , \qquad (70)$$

ce qui signifie que la densité numérique actuelle de photons est

$$428 \text{ photons.cm}^{-3} \qquad (71)$$

Nous reparlerons de ce rayonnement à plusieurs reprises dans ce cours.

2. Il existe une composante diffuse dans le domaine radio. Outre l'émission des galaxies sous forme de rayonnement de freinage du gaz ionisé des régions HII à 10^4 K, les radio-sources contribuent à ce rayonnement.
   Le gaz atomique et notamment la raie d'émission à 21cm est une source potentielle particulièrement intéressante à très grand redshift. Il n'a pas encore été détecté mais comme les grandes structures proviennent de l'effondrement de ces nuages, on espère

pouvoir le détecter un jour. C'est un des objectifs du grand radiotélescope GMRT en Inde.

3. L'autre source intense de rayonnement provient des galaxies, depuis le domaine du proche UV, puis l'optique et l'infrarouge proche. Son origine est principalement le rayonnement stellaire. On sait que la densité des galaxies faibles atteint 200 objets par minute d'arc-carré. Ce sont elles qui contribuent à cette composante diffuse.
   Une forte contribution a été détectée aussi hors du plan galactique dans l'infrarouge lointain et le submillimétrique. Elle est produite par la poussière des galaxies très lointaines.

4. Le rayonnement X est une composante importante, qui est composée de 3 sources. La composante "X-mou" est émise par les radiogalaxies et les quasars, la seconde est le gaz chaud intra-amas, la dernière provient des galaxies de Seyfert.

5. Les sources gamma. Elles comprennent notamment les sursauts gamma (Gamma-Ray-Bursts), phénomènes durant quelques millisecondes à quelques centaines de secondes, dont la fréquence de détection est d'aujourd'hui de un par jour. Leur origine cosmologique a été démontrée en 1997 où la première mesure de redshift donna $z = 0.835$. L'origine pourrait être la coalescence de deux objets compacts ou bien la manifestation d'une "hypernova" (ou collapstar) qui correspond à un effondrement d'une étoile massive en trou noir. Le reste de l'émission provient de quasars et de radiosources.

2.7 L'âge de l'univers

Un certain nombre de contraintes permettent de fixer l'âge ou une limite inférieure à l'âge de l'univers. Toutes ces méthodes montrent qu'il se situe entre 10 et 20 milliards d'années. Cependant, les incertitudes sont grandes.

Nucléocosmochronologie. Le moyen le plus robuste a été initialement proposé par Hoyle et Fowler en 1960. Il consiste à utiliser la *nucléocosmochronologie* qui détermine l'âge de l'univers à partir de l'abondance des éléments radioactifs à longue période. La plupart des noyaux radioactifs de cette catégorie a été créée par des réactions nucléaires rapides. Ces processus se déroulent principalement dans les supernovae, pendant la phase d'explosion. Donc, étant donné que les supernovae sont à l'origine des étoiles massives dont la durée de vie est très courte ($\approx 10^7$ ans), la nucléocosmochronologie permet en principe

de déterminer le moment où les étoiles et les galaxies se sont formées.
La nucléocosmochronologie présente l'avantage de pouvoir construire l'histoire de la Terre, du Système Solaire ou de la Galaxie à partir d'échantillons de météorites retrouvées sur Terre. C'est le cas par exemple avec les isotopes d'Uranium et de Plomb qui permettent de fixer l'âge du Système Solaire, t_s.
L'isotope ^{235}U se transforme en ^{207}Pb avec un temps de décroissance $\tau_{235} = 10^9$ ans ; l'isotope ^{238}U se transforme en ^{206}Pb avec un temps de décroissance $\tau_{238}= 6.3 \times 10^9$ ans. On a donc

$$^{235}\mathrm{U}_i + ^{207}\mathrm{Pb}_i = ^{235}\mathrm{U}_0 + ^{207}\mathrm{Pb}_0 = ^{235}\mathrm{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] + ^{207}\mathrm{Pb}_i \ , \qquad (72)$$

où l'indice "i" indique le temps initital et l'indice "$_0$" l'époque actuelle. De même

$$^{238}\mathrm{U}_i + ^{206}\mathrm{Pb}_i = ^{238}\mathrm{U}_0 + ^{206}\mathrm{Pb}_0 = ^{238}\mathrm{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] + ^{206}\mathrm{Pb}_i \ . \qquad (73)$$

Par ailleurs, comme ^{204}Pb n'a pas de progéniteur, $^{204}\mathrm{Pb}_i = ^{204}\mathrm{Pb}_0$. Les rapports d'abondance avec ^{204}Pb sont donc :

$$R_{^{207}\mathrm{Pb}} = \frac{^{207}\mathrm{Pb}_0}{^{204}\mathrm{Pb}_0} = \frac{^{207}\mathrm{Pb}_i}{^{204}\mathrm{Pb}_0} + \frac{^{235}\mathrm{U}_0}{^{204}\mathrm{Pb}_0}\left[\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] - 1\right] \ , \qquad (74)$$

et

$$R_{^{206}\mathrm{Pb}} = \frac{^{206}\mathrm{Pb}_0}{^{204}\mathrm{Pb}_0} = \frac{^{206}\mathrm{Pb}_i}{^{204}\mathrm{Pb}_0} + \frac{^{238}\mathrm{U}_0}{^{204}\mathrm{Pb}_0}\left[\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] - 1\right] \ . \qquad (75)$$

Si on dispose de deux météorites, $m1$ et $m2$, de compositions chimiques différentes mais dont les éléments avaient la même répartition isotopique initiale, on peut mesurer t_s à partir de $R_{^{207}\mathrm{Pb}}$, $R_{^{206}\mathrm{Pb}}$, $R_{^{235}\mathrm{U}}$ et $R_{^{238}\mathrm{U}}$:

$$\frac{R_{^{207}\mathrm{Pb},m1} - R_{^{207}\mathrm{Pb},m2}}{R_{^{206}\mathrm{Pb},m1} - R_{^{206}\mathrm{Pb},m2}} = \left(\frac{R_{^{235}\mathrm{U},m1} - R_{^{235}\mathrm{U},m2}}{R_{^{238}\mathrm{U},m1} - R_{^{238}\mathrm{U},m2}}\right) \frac{\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] - 1}{\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] - 1} \ . \qquad (76)$$

On trouve alors, pour le Système Solaire :

$$t_s = 4.6 \times 10^9 \text{ ans} \ . \qquad (77)$$

Après la formation de la Galaxie, les noyaux radioactifs à longue période se transforment lentement pour atteindre des quantités négligeables au temps T. Entre cette date et le moment de la formation du Système Solaire, il s'écoule une courte période Δ qui s'appelle la période d'isolation. L'âge de la Galaxie est donc

$$t_G = T + \Delta + t_s \ . \qquad (78)$$

On peut mesurer T et Δ par des méthodes analogues à celle décrite pour t_s. Les noyaux radioactifs à courte durée de vie, comme le ^{129}I et le ^{244}Pu fixent Δ entre 1 et 2×10^8 ans. Les noyaux à longue durée de vie comme le ^{232}Th-^{238}U ou le ^{187}Os-^{187}Re permettent de contraindre l'âge de notre Galaxie de la même façon que pour le Système Solaire. On trouve finalement

$$t_G \approx (0.6 - 2) \times 10^{10} \text{ ans} . \tag{79}$$

Âge des amas globulaires. L'utilisation des amas globulaires est simple dans son principe. La méthode consiste à tracer le diagramme couleur-magnitude des étoiles d'un amas globulaire qui est une représentation du diagramme Hertzsprung-Russell (HR ; voir figure 31). Ce diagramme qui illustre l'histoire de la population stellaire de l'amas montre des caratéristiques qui fixent son âge. En particulier la position du décrochage des étoiles de la séquence principale (*turnoff point*) vers la branche des géantes rouges indique la masse des étoiles qui sont en forte évolution et donne un âge relativement précis. On peut de cette façon ajuster la totalité du diagramme à des tracés d'évolution stellaire, les *isochrones*. Ces tracés donnent in fine l'âge de l'amas globulaire. Les incertitudes de cette méthode proviennent des modèles d'évolution stellaire et de l'influence de certains paramètres comme la métallicité. Pour le moment, on peut dire que l'âge des amas globulaires, t_{glo}, se trouve dans la fourchette (voir figure 32)

$$10.5 \times 10^9 < t_{glo} < 13.0 \times 10^9 \text{ ans} \tag{80}$$

Temps de refroidissement des naines blanches. La séquence d'évolution finale des naines blanches semble relativement simple à déterminer car on n'attend pas de changement de leur structure pendant la phase ultime de refroidissement. Cette propriété, qui résulte du fait que l'équation d'état d'un gaz dégénéré ne dépend pas de sa température, conduit à une relation simple entre la luminosité absolue de la naine blanche en fonction du temps :

$$L_{NB} \propto M_{NB} t^{-1.5} . \tag{81}$$

On attend donc une coupure assez brusque de la fonction de luminosité des naines blanches qui permet de déterminer leur âge.
Cette méthode a été appliquée sur certains amas globulaires (Fig. 33) et aux étoiles du disque de notre galaxie. Pour le disque de la Galaxie, on trouve :

$$t_{Gal} = 9.3 \pm 2.0 \times 10^9 \text{ ans} . \tag{82}$$

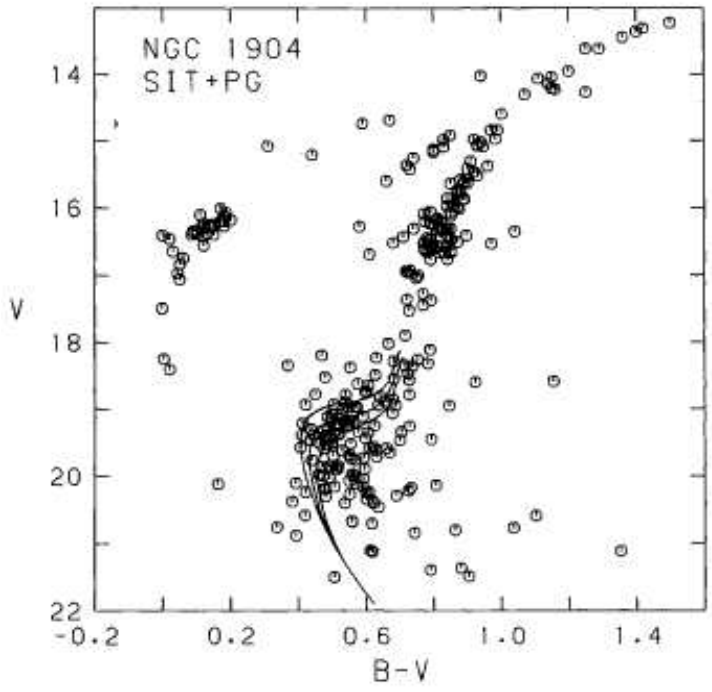

Figure 31.: *Diagramme couleur-magnitude d'un amas globulaire. Le point de rebroussement en bas repère les étoiles qui s'échappent de la séquence principale, ce qui fixe relativement bien l'âge du système. Les trois lignes représentent trois isochrones correspondant à trois metallicités légèrement différentes. On obtient alors trois âges possibles : 12, 15 ou 18 milliards d'années.*

2.8 Remarque sur le Paradoxe d'Olbers

Le paradoxe d'Olbers exprime une idée simple : *pourquoi le ciel est-il noir ?* En effet, supposons que l'on distribue uniformément dans l'univers des sources ponctuelles dont la luminosité absolue, L, est identique pour toutes. Le flux apparent reçu de chaque source par un observateur situé à la distance r de la source est $L/(4\pi r^2)$. Si n est la densité numérique des sources, alors le flux total reçu, pour un univers euclidien et statique serait :

$$L_{tot} = \int_0^\infty 4\pi r^2 n \frac{L}{4\pi r^2} \mathrm{d}r \ , \tag{83}$$

qui diverge à l'infini si la densité n est constante.
L'argument contre ce paradoxe est l'âge fini de l'univers. Il signifie en effet que l'univers n'a pas pu produire une densité de sources infinie pour produire cette énergie. Le fond du problème est cependant plus subtil et

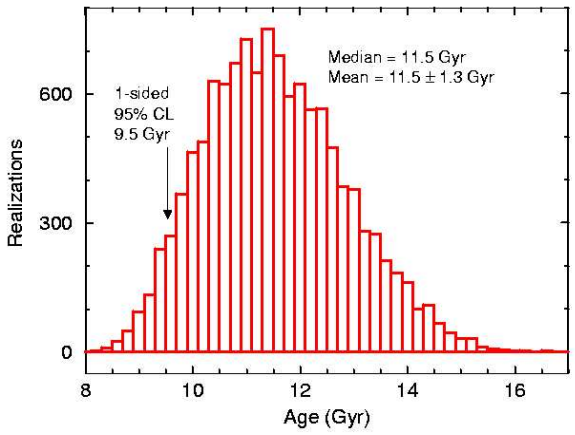

Figure 32.: *Histogramme de la distribution des âges possibles de 17 amas globulaires. La distribution échantillonne plusieurs modèles d'évolution stellaire ce qui explique le grand nombre de réalisations. L'histogramme illustre bien la diversité des âges possibles suivant le modèle d'évolution stellaire considéré.*

trouve son origine dans l'expansion de l'univers.
En particulier, l'argument des sources ponctuelles élude le fait que ces sources sont des apports d'énergie qui ionisent le milieu externe et qui provoquent donc un rayonnement par diffusion du milieu ionisé. Ce rayonnement est estimé par sa brillance de surface (car maintenant il ne s'agit plus d'un objet ponctuel mais d'un objet étendu, voire du ciel tout entier). Or la brillance de surface est indépendante de la distance. Donc si l'univers était fortement ionisé dans le passé, nous devrions être baignés dans ce rayonnement. Ce rayonnement, nous pensons qu'il a du exister si le modèle du Big Bang est valide. Le paradoxe d'Olbers exprimé sous cette forme prend une autre dimension. Mais il a une réponse : l'expansion de l'univers qui refroidit progressivement et qui décale vers le rouge le rayonnement. Son résidu à 2.7 K existe bien, même s'il n'est plus émis dans le domaine visible.

3. Les bases de la cosmologie moderne

La cosmologie physique moderne repose sur

- une théorie de la gravitation, la relativité générale,

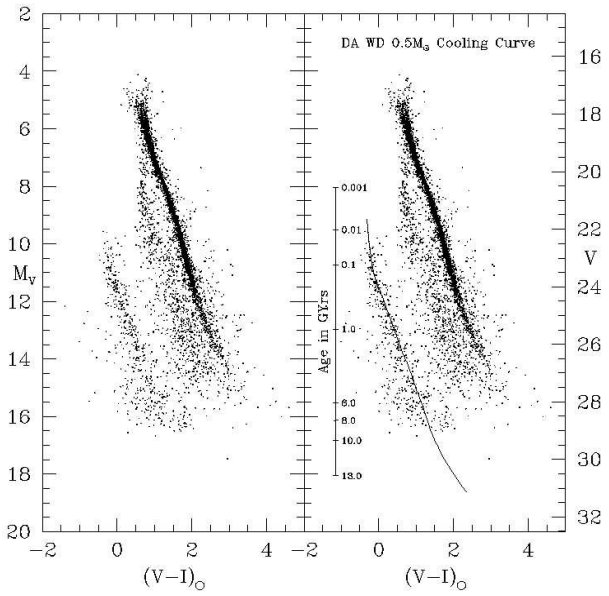

Figure 33.: *Diagramme couleur-magnitude de l'amas globulaire M4 tracé à partir d'observations du HST. La figure de droite montre la séquence de refroidissement. Elle présente une coupure brusque pour* $t = 9 \times 10^9$ *ans.*

- un certain nombre de postulats qui permettent d'établir des relations théoriques simples entre la courbure de l'Univers et son contenu en matière-énergie : les équations d'Einstein,
- un principe décrivant l'Univers lui-même : le principe cosmologique. C'est ce principe qui permet de définir la métrique de l'Univers et donc de construire des grandeurs associées aux observations.

Ce n'est pas l'objet de ce cours de présenter la relativité générale. Pour ceux que cela intéresse, je renvoie aux références bibliographiques.
En relativité restreinte, l'intervalle entre deux événements situés en (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \; . \tag{84}$$

L'élément ds est invariant par changement de coordonnées. Le chemin parcouru par les photons est simplement défini par $ds = 0$, et celui de toutes particules de matière est tel que $\int_{chemin} ds$ est stationnaire. En l'absence de forces extérieures, les particules suivent une ligne droite.
La relativité générale ne considère plus la gravitation comme une force, mais comme une propriété de l'espace-temps. Celui-ci n'est plus nécessairement plat, mais peut être éventuellement courbé, notamment

sous l'action de la gravité. Pour en rendre compte, l'intervalle entre deux événements est défini de façon plus générale sous la forme

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \ , \tag{85}$$

où g_{ij} est le tenseur métrique, $x^0 = ct$, et x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées d'espace.
Le chemin d'une particule libre est une géodésique définie de la façon suivante :

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \ . \tag{86}$$

Les Γ^i_{kl} sont les symboles de Christoffel[8] :

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} [\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}] \ , \tag{87}$$

et

$$g^{im} g_{mk} = \delta^i_k \text{ symbole de Kroneker} \tag{88}$$

3.1 Construction des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont établies à partir de postulats supplémentaires à ceux de la relativité générale et qui sont donc indépendants du principe d'équivalence. En particulier, Einstein souhaitait

1. établir une relation entre la matière-énergie et la métrique,
2. faire de l'impulsion-énergie T_{ij} un *tenseur* qui ne contienne que les dérivées premières et secondes de g_{ij},
3. que sa dérivée covariante soit nulle,
4. qu'aux limites (à définir), $T^k i \ ; k = 0$ se réduise à l'équation de Poisson $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$.

Le moyen le plus simple de satisfaire la condition (4) c'est de construire des équations linéaires dans les dérivées secondes de la métrique.
Le tenseur de Riemann-Christoffel, R_{ijkl}, (cf annexe) et le tenseur d'Einstein, G_{ij}, permettent de répondre parfaitement aux postulats d'Einstein. En effet, R_{ijkl} est le seul tenseur que l'on peut construire à partir des dérivées secondes du tenseur métrique. De plus, le tenseur d'Einstein contient bien les dérivées secondes de g_{ij} et respecte bien la propriété

[8]Nous adoptons la convention d'Einstein où tous les indices répétés signifient une sommation sur l'indice

$G^k i \; ; k = 0$ pour que la dérivée covariante du tenseur impulsion-énergie soit nulle. Einstein a donc postulé la forme de son équation fondamentale :

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \tag{89}$$

Le terme $8\pi G/c^4$ garantit qu'aux limites des champs faibles on retrouve bien l'équation de Poisson. On peut noter que, comme $g^k_{i\;;\;k} = 0$ on a bien $T^k_{i\;;\;k} = 0$
En fait la forme la plus générale contient une constante additionnelle, *la constante cosmologique* :

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \tag{90}$$

3.2 Principe cosmologique

La cosmologie moderne est basée sur l'idée que l'homme n'a pas de position privilégiée et donc que l'Univers doit être partout le même. C'est le *Principe Copernicien*. Ce principe est en fait relié au au *Principe Cosmologique* qui postule que :

1. il existe un temps universel. Dans ce cas, l'espace-temps peut toujours être décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle. On peut toujours écrire la métrique sous la forme :

   $$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \tag{91}$$

   où dl^2 représente la composante spatiale de la métrique. La coordonnée t est le temps mesuré, c'est à dire le temps propre d'un observateur dont la ligne d'univers est orthogonale aux coordonnées spatiales.

2. La composante spatiale de l'univers est homogène et isotrope. On peut alors démontrer que dl^2 peut se mettre sous la forme

   $$dl^2 = B(r,t) dx^2 \tag{92}$$

   avec

   $$B(r,t) = R^2(t) F(r) \tag{93}$$

   où le coefficient de similitude, R, ne dépend que du temps. En effet, considérons par exemple un triangle semblable observé au temps t et t' (cf Figure 34). En vertu du principe d'homogénéité et d'isotropie , le coefficient de similitude doit être indépendant du triangle choisi et de la position du triangle dans l'espace.

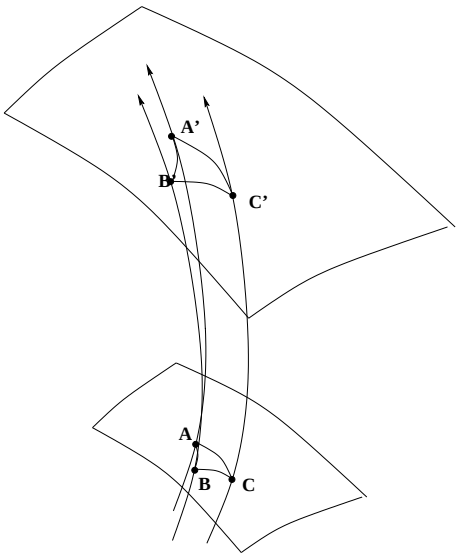

Figure 34.: *Évolution temporelle d'un triangle sur une hypersurface $t = Cte$ pour deux coordonnées de temps t et t'. Les deux triangles sont homologues. Les lignes d'univers sont orthogonales aux hypersurfaces. Elles ne se croisent donc jamais, ce qui permet de définir un temps universel.*

Une conséquence immédiate c'est que les g_{ij} doivent avoir la même forme à tout instant, à un facteur conforme près indépendant du temps.
Par ailleurs, il est possible de démontrer que les sections spatiales sont des hypersurfaces à *courbure constante*. L'expression la plus générale pour $F(r)$ est

$$F(r)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \; ; k = -1, 0, 1 \tag{94}$$

La seule métrique satisfaisant le principe cosmologique est la métrique suivante, dite de Friedmann-Roberston-Walker (FRW) :

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{95}$$

Alternativement, avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$:

$$\begin{cases} k=0 & dl^2 = R(t)^2\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \\ k=1 & dl^2 = R(t)^2\left(\dfrac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2\right) = R(t)^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2\right) \quad 0 \leq \chi \leq \pi \\ k=-1 & dl^2 = R(t)^2\left(\dfrac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2\right) = R(t)^2\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2\right) \quad 0 \leq \chi \leq \infty \end{cases} \tag{96}$$

Ces trois solutions génériques sont illustrées sur la Figure 35.
A partir de ces solutions on peut calculer le volume correspondant (implicitement $R = R(t)$) :

$$V = R(t)^3 \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{97}$$

$$\begin{cases} V_{k=0} = & \dfrac{4\pi(Rr)^3}{3} \\ V_{k=1} = & \dfrac{4\pi(Rr)^3}{3}\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\arcsin(r)}{r^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{(1-r^2)^{1/2}}{r^2}\right] \\ V_{k=-1} = & \dfrac{4\pi(Rr)^3}{3}\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{(1+r^2)^{1/2}}{r^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{argsh}(r)}{r^3}\right] \end{cases} \tag{98}$$

L'hypothèse d'un univers isotrope a une base observationnelle relativement solide. Le rayonnement cosmologique résiduel est remarquablement isotrope. Même les fluctuations de température sont uniformément distribuées dans le ciel, et dans tous les cas elles ne dépassent pas des amplitudes de l'ordre de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$. La distribution des galaxies et des quasars (voir par exemple les figures 15 et 28) et des radiosources est aussi remarquablement isotrope. Les évidences concernant l'homogénéité sont moins nombreuses. La distribution des quasars du récent relevé 2dF (Figure 28) est cependant convaincante. Des données identiques sur les radiosources montrent aussi cette homogénéité et la cartographie à très grande échelle des galaxies du relevé 2dF donne des premiers indices que sur des échelles supérieures à 200 Mpc la distribution est homogène. On a donc de fortes présomptions qui confortent un des principes essentiels de la cosmologie physique moderne. Il faut cependant noter que l'hypothese d'un univers *partout* isotrope (principe copernicien) implique qu'il est nécessairement homogène. Ceci est illustré sur la figure 36. L'idée exprimée par le principe copernicien utilisée conjointement avec les évidences observationnelles d'isotropie de l'univers consolident l'hypothèse qu'il est aussi homogène.
Il existe un principe cosmologique fort qui ajoute que l'univers est immuable dans le temps. C'est en particulier un principe de base des

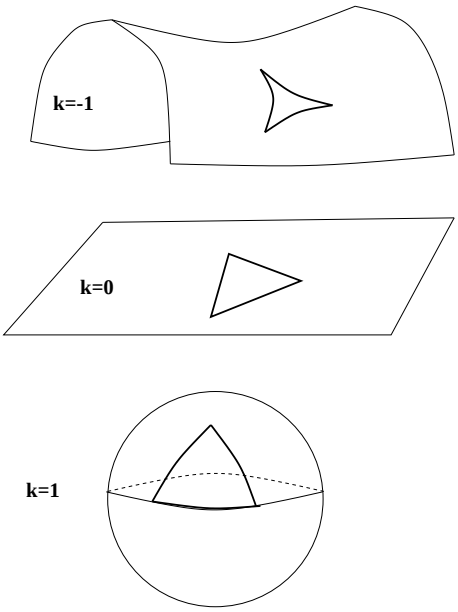

Figure 35.: *Les trois modèles : ouvert (k=-1), plat (k=0) et fermé (k=1).*

modèles d'univers statique. Cependant l'hypothèse d'un univers statique est en contradiction avec certains faits observationnels, comme le paradoxe d'Olbers ou la forme du spectre de corps noir du rayonnement cosmologique fossile. En effet, l'existence de ce rayonnement n'a pas de sens dans le cadre des modèles statiques, sauf s'il est produit par d'hypothétiques poussières. Le spectre prédit dans cette hypothèse n'a pas la forme observée par le satellite COBE. Par la suite nous admettrons le principe cosmologique sans l'hypothèse d'un temps immuable.

3.3 Conséquences du principe cosmologique

Loi de Hubble. La *distance propre*, d_{pr}, d'un point P par rapport à un point P_0, que nous prendrons à l'origine d'un système de coordonnées polaires, est la distance parcourue par un photon (cdt), soit :

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{R(t)dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = R(t)f(r) \tag{99}$$

où $f(r) = \arcsin(r), r, \mathrm{argsh}(r)$ pour $k = 1, 0, -1$ respectivement.
On peut comparer la distance propre au temps t à celle au temps t_0 :

$$d_{pr}(t) = R(t)f(r) \quad ; \quad d_{pr}(t_0) = R(t_0)f(r) \tag{100}$$

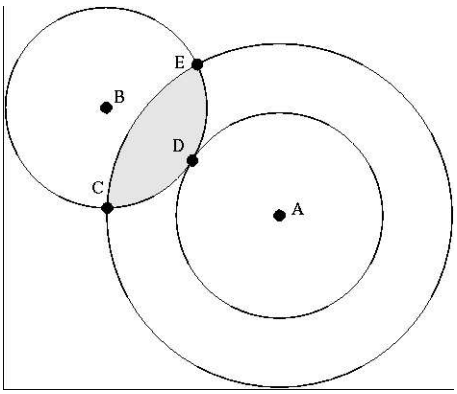

Figure 36.: *Une justification simple de Peacock (Cosmological Physics, Cambridge University Press 1999) qu'un univers partout isotrope implique qu'il est homogène. Pour l'observateur placé au point B, l'isotropie implique que les points C, D et E sont identiques. Dans ce cas, comme l'observateur B n'est pas privilégié, il doit en être de même pour A. Il faut donc nécessairement que l'Univers soit homogène.*

et donc

$$d_{pr}(t_0) = \frac{R(t_0)}{R(t)} d_{pr}(t) \tag{101}$$

Ainsi, la distance propre change avec le temps. Les objets ont donc une vitesse radiale

$$v_r = \frac{\mathrm{d}d_{pr}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{R}(t) f(r) = \dot{R}(t) \frac{d_{pr}}{R(t)} = H(t) d_{pr} \ . \tag{102}$$

C'est la *loi de Hubble*. La quantité

$$\dot{R}(t)/R(t) = H(t) \tag{103}$$

est le *paramètre de Hubble*.
C'est une conséquence directe du principe cosmologique. Comme les figures doivent évoluer de façon similaire (par exemple un triangle), la loi d'expansion (ou de contraction) est nécessairement donnée par la loi de Hubble.

Redshift. Par définition, le décalage spectral (redshift) z s'exprime en fonction de la longueur d'onde observée au point O au temps t_0 et de la longueur d'onde émise au temps t_e sous la forme

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \tag{104}$$

Comme un photon a pour caractéristique $ds^2 = 0$, on a donc

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \ . \tag{105}$$

Soient deux maxima consécutifs de l'onde, l'un émis à t_e et reçu à t_0 et l'autre émis à $t_e + \delta t_e$ et reçu à $t_0 + \delta t_0$. On a

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} \tag{106}$$

soit

$$\begin{aligned} \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} \quad &= \Phi(t_0+\delta t_0) - \Phi(t_e+\delta t_e) - \Phi(t_0) + \Phi(t_e) \\ &= \Phi'(t_0)\delta t_0 - \Phi'(t_e)\delta t_e = 0 \ , \end{aligned} \tag{107}$$

où Φ' est la dérivée de Φ, et par conséquent

$$\frac{\delta t_e}{R(t_e)} - \frac{\delta t_0}{R(t_0)} = 0 \ . \tag{108}$$

C'est en particulier vrai pour $\delta t = 1/\nu$, où ν est la fréquence de l'onde. Il est donc immédiat que $\nu_e R(t_e) = \nu_0 R(t_0)$, et donc

$$\frac{R(t)}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{\lambda_0} \tag{109}$$

Le redshift exprime donc le rapport des facteurs d'échelle :

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \tag{110}$$

L'existence du décalage spectral cosmologique est donc aussi une conséquence du principe cosmologique.

4. Cosmographie : grandeurs physiques des univers homogènes et isotropes

4.1 Paramètre de décélération

Le paramètre de Hubble mesure le taux d'expansion à un temps t, mais il varie en fonction du temps selon une loi qui dépend du contenu de l'Univers. En effet

$$R(t) = R(t_0) + (t-t_0)\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)_{t=t_0} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\left(\frac{d^2R(t)}{dt^2}\right)_{t=t_0} + \ldots \tag{111}$$

Ecrivons

$$\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)_{t=t_0} = R_0 \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0}\right)_{t=t_0} \tag{112}$$

où $R_0 = R(t_0)$. On a donc, en notant $H_0 = H(t_0)$:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = R_0 \left(\frac{d\left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0}\right)}{dt}\right) = R_0 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} \left(\frac{R_0}{\dot{R}(t_0)}\right)^2 = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t) R_0}{\dot{R}(t_0)^2} \tag{113}$$

on a donc

$$R(t) = R_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + ...\right] \tag{114}$$

où

$$q_0 = - \frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}(t_0)^2} \tag{115}$$

est le *paramètre de décélération.*

4.2 Temps écoulé

Connaissant l'expression du redshift, on peut calculer $1+z$ et (t_0-t), le temps écoulé depuis t, pour des petits $H_0(t - t_0)$:

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{1}{\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + ...\right]} \tag{116}$$

que l'on développe sous la forme $(1 + u)^{-1}$ avec $u = \left(H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + ...\right)$ en conservant tous les termes jusqu'à l'ordre $H_0^2 (t - t_0)^2$. On en déduit

$$1 + z = 1 + H_0(t_0 - t) + H_0^2 (t_0 - t)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2}\right] + ... \tag{117}$$

On peut inverser cette expression et déduire le temps écoulé entre le redshift z et maintenant :

$$t(0) - t(z) = t_0 - t = \frac{-H_0 + H_0 \sqrt{1 + 4z \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)}}{2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2} \tag{118}$$

d'où

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left[z - z^2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + ...\right] \tag{119}$$

4.3 Distances et tests cosmologiques classiques

Les distances utilisées en cosmologie sont définies en fonction des grandeurs physiques auxquelles elles sont associées. Il en existe quatre importantes du point de vue de la cosmologie physique :

1. **La distance propre** est la distance physique $d(z_1; z_2)$ entre deux redshifts $z_1 < z_2$. Elle est mesurée par le temps de traversée des photons de z_1 à z_2. C'est donc par définition

$$d_{pr} = -c\mathrm{d}t = -c\frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}} \,. \tag{120}$$

2. **La distance comobile** est la distance sur l'hypersurface $t = t_0$ entre la source et l'observateur comobile avec l'expansion. C'est donc la distance entre les coordonnées comobiles de la source au redshift z_1 et de l'observateur au redshift z_2 :

$$d_{com} = -c\frac{\mathrm{d}t}{R} = -c\frac{\mathrm{d}R}{R\dot{R}} \,. \tag{121}$$

3. **La distance lumineuse** est par définition d_L telle que

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \tag{122}$$

où l et L sont respectivement les luminosités apparente et absolue de la source.

4. **La distance diamètre-angulaire** d_A est telle que l'angle sous-tendu par une source de dimension propre D, θ, soit tel que :

$$d_A = \frac{D}{\theta} \tag{123}$$

On peut facilement exprimer la coordonnée comobile r en fonction de H_0, q_0 et z. En effet

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \approx r + \mathcal{O}(r^3) \tag{124}$$

Donc au premier ordre

$$\frac{c}{R_0}\int_{t_e}^{t_0}(1+z)dt = r \tag{125}$$

D'après l'expression de $1+z$ (Eq. 117), on a

$$\frac{c}{R_0}\left[(t_0-t)+\frac{H_0}{2}(t_0-t)^2+...\right]=r \tag{126}$$

et compte tenu de l'expression de (t_0-t) donnée par l'équation (119), on a finalement

$$r=\frac{c}{R_0H_0}\left[z-\frac{z^2}{2}\left(1+q_0\right)+...\right] \tag{127}$$

Distance lumineuse. La distance lumineuse d_L est définie pour préserver la loi de diminution de la luminosité en fonction de la distance telle qu'elle est définie pour un univers euclidien :

$$d_L=\left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \tag{128}$$

où L est la luminosité absolue, c'est à dire la puissance émise à la coordonnée comobile r au temps t, et l est le flux reçu par l'observateur à $t=t_0$. La distance lumineuse dépend fortement de la distance comobile et du redshift. En effet, soit un observateur O situé à la coordonnée $r=0$ et qui reçoit au temps t_0 des photons d'une source située à la coordonnée r_1

1. Si la source a une luminosité absolue L, elle émet une énergie $L\mathrm{d}t_1$ pendant l'intervalle $\mathrm{d}t_1$;
2. cette énergie sera distribuée sur une sphère d'aire $4\pi R_0^2r_1^2$ mais sera maintenant reçue pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t_0$ plus long

$$\mathrm{d}t_0=\frac{R_0}{R(t_1)}\mathrm{d}t_1 \tag{129}$$

3. et la densité de flux (qui s'exprime en erg.cm^{-2}.Hz^{-1}) est aussi affectée par le décalage vers le rouge d'une quantité $R_0/R(t_1)$.

Par conséquent,

$$4\pi R_0^2r_1^2\mathrm{d}t_0\ l=L\mathrm{d}t_1\frac{1}{1+z} \tag{130}$$

soit

$$l=\frac{L}{4\pi R_0^2r_1^2}\frac{1}{(1+z)^2}\ . \tag{131}$$

Compte tenu de la définition de la distance lumineuse, on a donc

$$d_L(z)=R_0r\left(1+z\right)=\frac{R_0^2}{R(t)}r \tag{132}$$

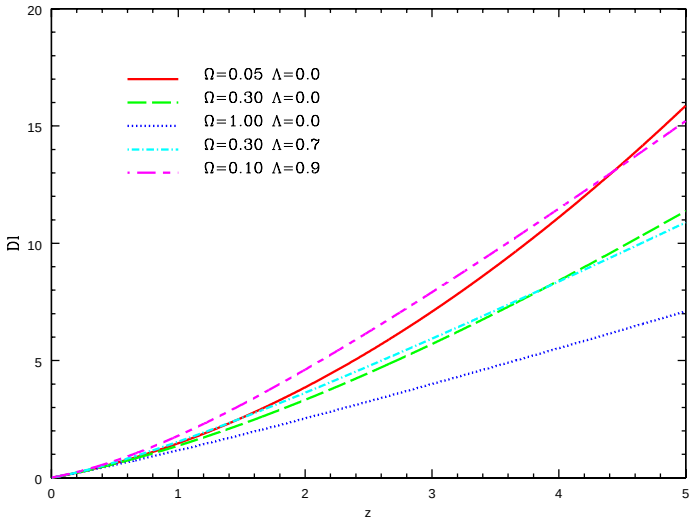

Figure 37.: *Évolution de la distance lumineuse en fonction du décalage spectral pour 5 modèles cosmologiques.*

En poursuivant avec les développements au premier ordre de la coordonnée comobile r en fonction de z (Eq. 127) on a

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)\, z^2 + ...\right] \tag{133}$$

La figure 37 montre le comportement de la distance lumineuse avec le redshift.

Distance diamètre angulaire. A l'instar de la distance lumineuse, la distance diamètre angulaire est construite pour préserver les propriétés de l'espace euclidien pour la variation angulaire d'un objet en fonction de la distance à l'observateur. Elle convertit donc une séparation angulaire observée d'un objet en une dimension physique transverse.
Soit D_{pr} le *diamètre propre* d'une source placée en r au temps t. Si $\Delta\theta$ est l'angle sous-tendu par D_{pr}, alors $D_{pr} = R(t) r \Delta\theta$. Par définition, la distance diamètre angulaire est

$$d_A = \frac{D_{pr}}{\Delta\theta} = R(t) r \tag{134}$$

La relation entre la distance angulaire et la distance lumineuse est donc

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \tag{135}$$

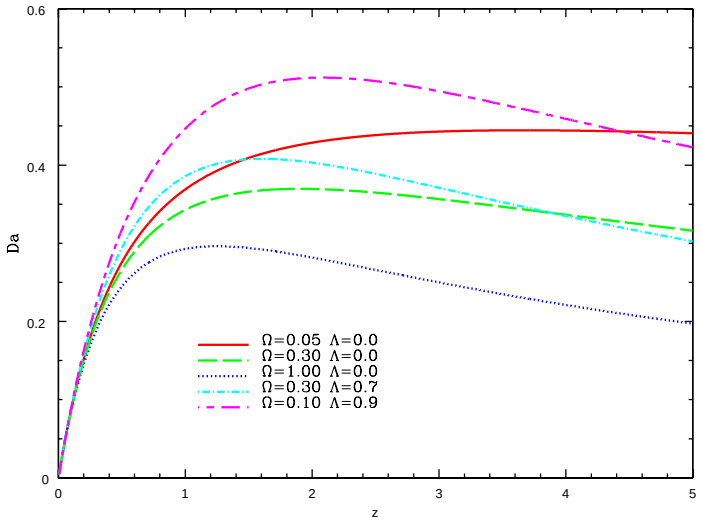

Figure 38.: *Évolution de la distance diamètre angulaire en fonction du décalage spectral pour les mêmes modèles cosmologiques que la figure 37. Pour la plupart, la distance décroît au-delà d'un redshift de 1, ce qui signifie que l'objet a une dimension angulaire apparente qui croît.*

La distance diamètre angulaire a la propriété remarquable de ne pas croître indéfiniment avec le décalage spectral et de diminuer au-delà de $z \approx 1$ (voir figure 38). Ainsi, pour certaines cosmologies, les objets les plus lointains ont une dimension angulaire plus grande que les objets proches. Ainsi, pour une cosmologie sans constante cosmologique, l'angle sous-tendu, θ, par un objet dont la dimension est D_{pr} est donc

$$\theta = \left(\frac{D_{pr} H_0}{c}\right) \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1)\left(\sqrt{1+2q_0 z} - 1\right)} \qquad (136)$$

Relation magnitude-redshift. Par définition le module de distance est la différence entre la magnitude apparente, m, et la magnitude absolue, M d'un objet. Il s'exprime en fonction de la distance lumineuse :

$$m - M = -5 + 5\log(d_L) \qquad (137)$$

où d_L est en parsec. Comme on connaît la relation entre d_L et r on peut donc exprimer le module de distance en fonction de z et q_0. Dans le cas général, on peut montrer que dans une cosmologie avec une constante cosmologique nulle, la distance lumineuse est donnée par la *relation de*

Mattig et le module de distance s'écrit (pour une constante cosmologique nulle)

$$m-M = -5-5\log H_0+5\log\left[\frac{1}{q_0^2\,(1+z)}\left[q_0 z+(q_0-1)\left[\sqrt{2q_0+1}-1\right]\right]\right] . \tag{138}$$

Pour des petits z, on peut utiliser l'équation (133) et dans ce cas

$$m-M = -5+5\,\log\left[\frac{10^6 cz}{H_0}\right]+5\log\left[1+\frac{1}{2}\,(1-q_0)\,z\right] . \tag{139}$$

Le terme 10^6 provient de la transformation des mégaparsecs (cz/H_0) en parsecs. On a donc :

$$m-M = 25-5\log\left[H_0(\mathrm{km.sec^{-1}Mpc^{-1}})\right]+5\log\left[cz(\mathrm{km.sec^{-1}})\right]+1.086(1-q_0)z+... \tag{140}$$

On remarque que la magnitude apparente est sensible au paramètre de décélération q_0. On peut donc en principe construire des diagrammes $m(z)$ pour évaluer la valeur de ce paramètre cosmologique.

Relation Comptage-magnitude. On peut déterminer comment varie le nombre de sources de luminosité apparente supérieure à l en fonction de l, $N(>l)$ (voir figure 39). Pour un univers euclidien, si toutes les galaxies ont la même luminosité absolue L et si les objets sont distribués uniformément avec une densité n_0 on a simplement

$$N(l) = \frac{4}{3}\pi n_0 d_L^3 \tag{141}$$

Comme

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \tag{142}$$

on a

$$N(l) \propto l^{-3/2} . \tag{143}$$

Puisque la magnitude apparente est donnée par une expression de la forme $m = -2.5\log l + K$, on a donc une relation linéaire simple entre la densité numérique de galaxies et la magnitude apparente.

$$\log N(l) = 0.6m + K' \tag{144}$$

soit

$$\alpha \;=\; \frac{\mathrm{d}\,\log N(l)}{\mathrm{d}m} = 0.6 \tag{145}$$

qui peut être comparée directement aux observations. C'est une propriété caractéristique des modèles euclidiens. En fait on peut démontrer qu'elle reste exacte lorsque les galaxies n'ont pas toute la même luminosité absolue. La pente des comptages des galaxies permet donc en principe de tester si notre univers est localement euclidien.
Dans le cas plus général, on a

$$N(l) = 4\pi \int_0^r n\left[t\left(r'\right)\right] \; R\left[t\left(r'\right)\right]^3 \frac{r'^2}{\sqrt{1-kr'^2}} dr' \tag{146}$$

où $t(r')$ est le temps auquel une source placée en r' a émis un signal qui arrive à l'observateur à t_0 (maintenant).
Si les galaxies ne sont ni créées ni détruites pendant l'intervalle $t(r) < t < t_0$, alors $nR^3 = n_0 R_0^3$ et donc

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1-kr'^2}} dr' \tag{147}$$

L'intégrant vaut $\sin(r), r, \mathrm{sh}(r)$ suivant la valeur de k. En développant en série de Taylor, on a, au premier ordre :

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{1}{10} k r^5 + ...\right] \tag{148}$$

En utilisant l'expression de r (Eq. 127) on obtient

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \frac{r^3}{3}\left[1 + \frac{3}{10} k r^2\right] \approx 4\pi n_0 R_0^3 z^3 \left[1 + \frac{z}{2}\left(1 + q_0\right)\right]^3 \tag{149}$$

soit

$$\log N(l) = 3 \log z - 0.651(1+q_0)z + K' \tag{150}$$

qui permet donc en principe de déterminer q_0 à partir des comptages des galaxies.

"Dimming factor" : effet de brillance de surface. Considérons la brillance de surface d'une source dans un univers sans expansion. Soit B_{int} sa brillance de surface intrinsèque. On suppose par simplicité qu'elle est uniforme et correspond à la brillance de surface bolométrique. B_{int} est la puissance émise par une source par unité de surface et unité d'angle solide. La luminosité intrinsèque L d'une section de la source d'aire S est $L_{int} = 2\pi S B_{int}$.
Soit un pinceau d'angle solide Ω d'une source à la distance euclidienne d, on a

$$L = 2\pi B_{int} S = 2\pi B_{int} \Omega d^2 \ . \tag{151}$$

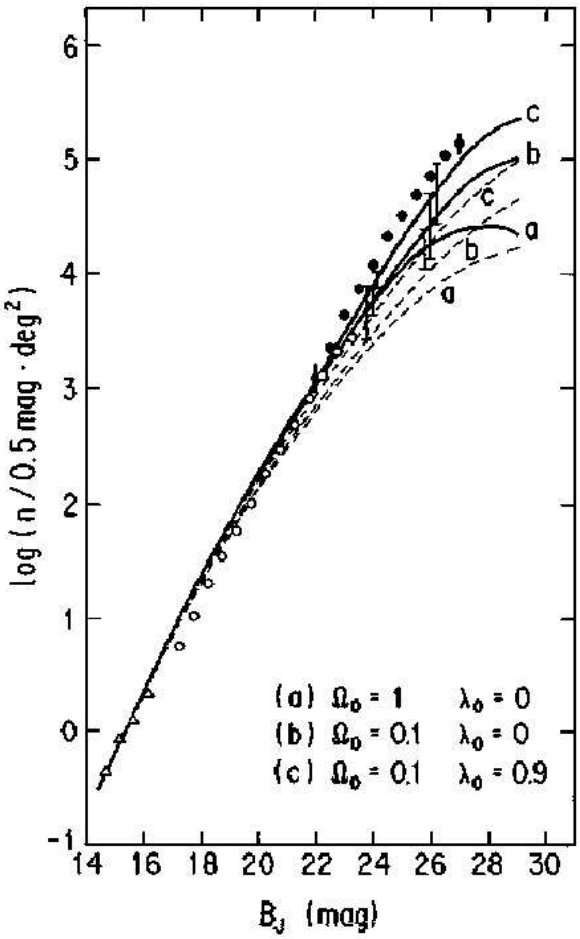

Figure 39.: *Comptage de galaxies par intervalle de magnitude. Les points sont les mesures obtenues par différentes observations. Les lignes continues représentent trois scénarios d'univers et les lignes pointillées les mêmes modèles mais pour lesquels on a introduit un modèle d'évolution des galaxies. Les modèles présentés ne parviennent pas à reproduire correctement les comptages (problème des "galaxies bleues" : la magnitude rapportées ici est la magnitude B). Il est important de remarquer que les effets cosmologiques et les effets d'évolution peuvent se combiner. La complexité des phénomèmes conduit à une dégénérescence qu'il est difficile de lever, ce qui limite l'intérêt de ce type d'observation pour tester les modèles d'univers.*

Le flux sera

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{152}$$

et donc

$$\frac{f}{\Omega} = B_{int} \tag{153}$$

Ainsi donc, le flux mesuré par l'observateur est constant et vaut ΩB_{int} quelle que soit la distance de l'objet. C'est une propriété particulière des univers sans expansion : la luminosité apparente décroît comme $1/d^2$ alors que l'angle solide couvre une aire de la source qui croît comme d^2. Les deux effets se compensent donc exactement.
Dans le cas d'un univers en expansion ce n'est plus vrai. En effet, on a

$$L = 2\pi B_{int} \Omega d_A^2 = 2\pi f d_L^2 \tag{154}$$

car il faut effectivement prendre d'une part la distance luminosité pour exprimer le flux et d'autre part la distance angulaire pour exprimer l'aire de la source couverte. On a dans ce cas

$$B_{obs} = \frac{f}{\Omega} = B_{int} \left(\frac{d_L}{d_A} \right)^2 \tag{155}$$

et il est immédiat que

$$B_{obs} = \frac{B_{int}}{(1+z)^4}. \tag{156}$$

C'est le "dimming factor" ou facteur d'atténuation cosmologique. Cet effet a été utilisé comme un test cosmologique (test de Tolman). Il a un effet dramatique sur la visibilité des galaxies de très grand redshift.

K-correction L'évaluation des magnitudes d'une galaxie à un redshift z dans un filtre donné et la comparaison avec une galaxie à $z = 0$ doit tenir compte du décalage spectral du flux. Il est donc nécessaire de recalibrer préalablement le flux de la galaxie au redshift z. Cette correction qui porte le nom de *K-correction* est un pur problème observationnel associé au fait que l'on n'observe qu'à travers un filtre de bande passante finie. La luminosité bolométrique a donc une K-correction nulle.
Pour un filtre F son expression est

$$K_F(t_e, z) = 2.5\log(1+z) - 2.5\log \left[\frac{\left[\int_0^\infty E_e \left(t_e, \frac{\lambda}{1+z} \right) T_F(\lambda) d\lambda \right]}{\left[\int_0^\infty E_e \left(t_e, \lambda \right) T_F(\lambda) d\lambda \right]} \right] \tag{157}$$

où T_F est la transmission du filtre F et E_e est le flux émis par la source. La correction est illustrée sur la figure 40 et se comprend simplement en

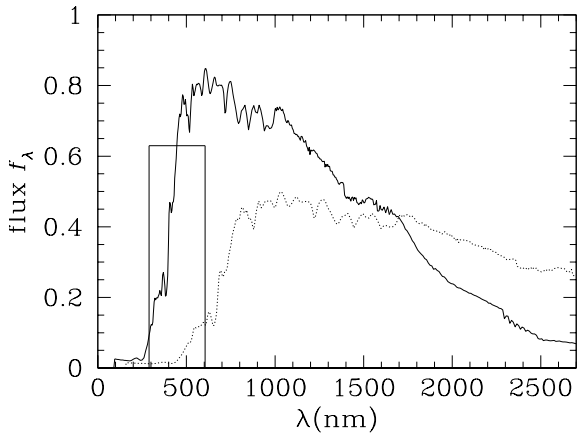

Figure 40.: *Évolution de la distribution spectrale d'énergie d'une galaxie en fonction du redshift. Le spectre en trait plein et celui en pointillé représentent la même galaxie à $z = 0$ (trait plein) et à $z = 0.7$ (trait pointillé). Le décalage spectral du flux et nettement visible. Le rectangle noir représente la position et la transmission d'un filtre fictif. Il est clair que le filtre ne voit pas le même domaine spectral et que la comparaison du flux dans ce filtre n'a de sens qu'après avoir corrigé de l'effet du décalage spectral, ce qui implique de connaître le spectre intrinsèque de l'objet.*

supposant un spectre de galaxie plat. Dans ce cas, le flux reçu dans le filtre à un redshift z et centré sur la longueur d'onde λ_0 est donc émis par la source à la longueur d'onde $\lambda_0/(1+z)$. D'où le premier terme de la K-correction. Par ailleurs, le spectre est dilaté par l'expansion et donc l'énergie reçue dans tout le filtre provient en fait d'un intervalle spectral contracté de $(1+z)$. D'où l'expression de l'émission au dénominateur du second terme.

Les tests cosmologiques classiques. Les expressions des distances, volumes, magnitudes et comptages vues précédemment ont servi de base pour l'interprétation des premiers relevés observationnels cosmologiques. Au cours des années 1960-1970 sont apparus les premiers "tests classiques" utilisant les propriétés décrites dans les sections précédentes. Ils avaient pour objectifs de mesurer le paramètre q_0 ou le paramètre de densité Ω_0 :

1. relation décalage spectral-magnitude apparente (figure 41),
2. relation volume-comptage des galaxies,
3. âge des galaxies lointaines,
4. relation décalage spectral-diamètre apparent (figure 42),

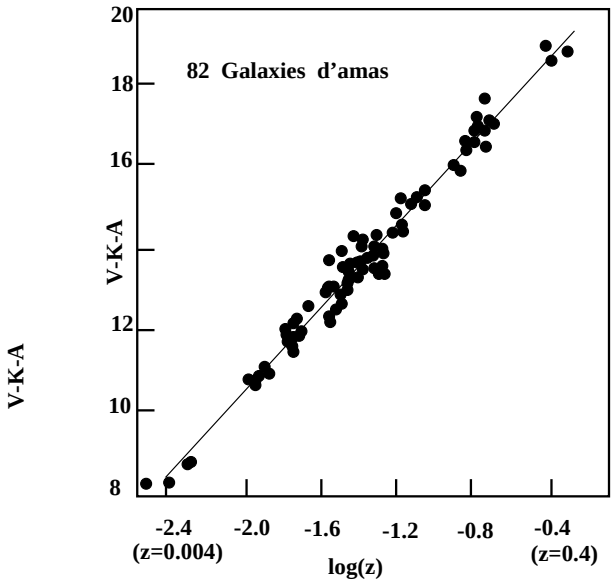

Figure 41.: *Test classique : évolution de la magnitude des galaxies en fonction du redshift (c'est un diagramme de Hubble, donc). Il s'agit de 82 galaxies d'amas dont la magnitude est corrigée de la K-correction. Le domaine de redshift est trop faible pour que des effets cosmologiques ou d'évolution soient visibles.*

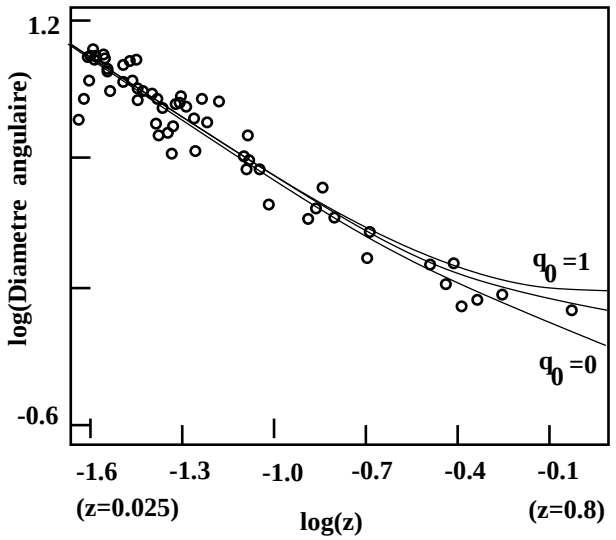

Figure 42.: *Test classique : évolution du diamètre angulaire d'un échantillon de galaxies en fonction du redshift. Les effets cosmologiques commencent à devenir sensible à partir de* $z = 0.5$. *On peut difficilement séparer les trois paramètres d'accélérération* $q_0 = 1, 0.5, 0$ *montrés sur la figure.*

5. relation brillance de surface-redshift (test de Tolman ; teste l'expansion),
6. conservation du nombre de galaxies (test de Loh et Spillar).

Ces tests n'ont en fait rien donné de significatif pour une raison qui nous semble aujourd'hui évidente : les galaxies évoluent en nombre, en taille et en luminosité et ces effets sont au moins aussi importants que les effets cosmologiques.

5. Les modèles d'univers de Friedmann

Le principe cosmologique implique que la métrique de l'espace-temps est celle de Friedmann-Roberson-Walker :

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2\right] \tag{158}$$

Les composantes temporelles et spatiales sont donc

$$x^0 = ct \;\; ; \;\; x^1 = r \;\; ; \;\; x^2 = \theta \;\; ; \;\; x^3 = \phi \tag{159}$$

et on peut donc calculer toutes les composantes des tenseurs métriques, de Ricci, d'Einstein et les symboles de Christoffel. Ces éléments sont indispensables pour établir les équations de Friedmann.

5.1 Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d'intérêt cosmologique

Dans les quatre sections suivantes, je donne les composantes non nulles de ces tenseurs. Vous pouvez sauter ces sections. Elles n'ont pour but que de vous montrer comment on parvient aux équations de Friedmann et de servir de guide pour ceux d'entre vous qui souhaiteraient calculer tous ces coefficients.

Élements non-nuls du tenseur métrique

$$\begin{cases} g_{00} = 1 & g_{11} = -\dfrac{R(t)^2}{1-kr^2} \\ g_{22} = -R(t)^2r^2 & g_{33} = -R(t)^2r^2\sin^2\theta \\ g^{00} = 1 & g^{11} = -\dfrac{1-kr^2}{R(t)^2} \\ g^{22} = -\dfrac{1}{R(t)^2r^2} & g_{33} = -\dfrac{1}{R(t)^2r^2\sin^2\theta} \end{cases} \tag{160}$$

et

$$(-g)^{1/2} = \frac{R(t)^2 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{161}$$

Élements non-nuls des symboles de Christoffel

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\dot{R}(t)}{R(t)} & \\
\Gamma^0_{11} = \dfrac{R(t)\dot{R}(t)}{c(1-kr^2)} & \Gamma^0_{22} = \dfrac{R(t)\dot{R}(t)r^2}{c} \\
\Gamma^0_{33} = \dfrac{R(t)\dot{R}(t)r^2\sin^2\theta}{c} & \\
\Gamma^1_{11} = \dfrac{kr}{1-kr^2} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^1_{22} = -r\left(1-kr^2\right) & \\
\Gamma^1_{33} = -r\left(1-kr^2\right)\sin^2\theta & \\
\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\,\cos\theta & \Gamma^3_{23} = \mathrm{cotg}\theta
\end{array}\right. \tag{162}$$

Composantes du tenseur de Ricci, courbure

$$\left\{\begin{array}{l}
R^0_0 = \dfrac{3}{c^2}\dfrac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \\
R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \dfrac{2\dot{R}(t)^2 + 2kc^2}{R(t)^2}\right)
\end{array}\right. \tag{163}$$

D'où l'on déduit la courbure scalaire :

$$R = \frac{6}{c^2}\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \left(\frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2}\right) \tag{164}$$

Composantes du tenseur d'Einstein

$$\left\{\begin{array}{l}
G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = R^1_1 - \frac{1}{2}R = -\dfrac{1}{c^2}\left(2\dfrac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \dfrac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2}\right) \\
G^0_0 = R^0_0 - \frac{1}{2}R = -\dfrac{3}{c^2}\left(\dfrac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2}\right)
\end{array}\right. \tag{165}$$

5.2 Équations de Friedmann sans constante cosmologique

À partir des éléments résumés ci-dessus et de l'équation d'Einstein, on retrouve les équations de Friedmann :

$$\begin{cases} 2\dfrac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \dfrac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \dfrac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \dfrac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \dfrac{8\pi G}{c^2} T_3^3 & (a) \\ \dfrac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \dfrac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 & (b) \end{cases} \tag{166}$$

Il reste à déterminer les composantes du tenseur impulsion-énergie. Tout d'abord, pour des raisons de symétrie conformément à l'hypothèse d'isotropie, ce tenseur doit avoir tous les éléments diagonaux nuls.
Dans le cas le plus simple, un fluide parfait, on peut montrer que ce tenseur s'exprime uniquement à partir de la densité d'énergie, ρ, et de la pression, P du fluide. C'est une matrice diagonale de composantes :

$$T_j^i = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \tag{167}$$

Pour des raisons de clarté nous écrirons désormais $R(t) = R$, $\dot{R}(t) = \dot{R}$ et $\ddot{R}(t) = \ddot{R}$. Sachant que

$$\frac{d}{dt}\left[R\left(\dot{R}^2 + kc^2\right)\right] = \dot{R}\left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R}\right] \tag{168}$$

et que d'après l'équation (166-a) et l'équation (167)

$$\left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R}\right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \tag{169}$$

alors

$$\frac{1}{\dot{R}}\frac{d}{dt}\left[R\left(\dot{R}^2 + kc^2\right)\right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \tag{170}$$

et d'après l'équation (166-b)

$$\left(\dot{R}^2 + kc^2\right) = \frac{8\pi G}{3c^2} R^2 \rho c^2 \tag{171}$$

on a donc

$$\frac{1}{\dot{R}}\frac{d}{dt}\left[\frac{8\pi G}{3c^2} R^3 \rho c^2\right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \tag{172}$$

d'où l'équation de conservation

$$\frac{d}{dR}\left[\rho c^2 R^3\right] + 3PR^2 = 0 \tag{173}$$

Le sens de cette équation est relativement simple : $d\left[\rho c^2 R^3\right]$ exprime une variation d'énergie totale. $3PR^2 dR$ exprime un travail. Par conséquent l'équation (173) exprime la variation d'énergie pendant l'expansion adiabatique de l'univers. Il faut noter que c'est une conséquence directe des lois de conservation contenues implicitement dans les équations d'Einstein.

Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann. La signification physique des équations de Friedmann est relativement simple si l'on tente d'en fournir une vision Newtonnienne classique.
Considérons une sphère de rayon l, de masse totale m dont la distribution de matière soit homogène, isotrope et de densité ρ. L'accélération subie par une masse unité située à une distance l du centre de la sphère est

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{Gm}{l^2} = -\frac{G}{l^2}\frac{4}{3}\pi l^3 \rho \tag{174}$$

En multipliant cette équation par $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = \dot{l}$ on trouve immédiatement que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{l}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Gm}{l}\right) \tag{175}$$

et donc par intégration

$$\frac{1}{2}\dot{l}^2 = \frac{Gm}{l} + C \tag{176}$$

qui exprime la conservation de l'énergie par unité de masse, la constante C devant être proportionnelle à l'énergie totale.
Par ailleurs, le principe cosmologique conduit à la loi d'échelle

$$\frac{l}{R} = \frac{l_0}{R_0} \Longrightarrow l = l_0 \frac{R}{R_0} \tag{177}$$

En substituant dans l'équation (176) on trouve

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R_0}\dot{R}\right)^2 = G\frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{l_0}{R_0}R\right)^2 + C \tag{178}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\dot{R}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \tag{179}$$

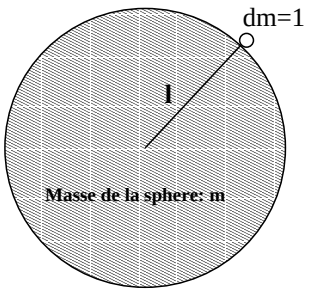

Figure 43.: *Sphère de masse totale m de densité homogène et isotrope. On s'intèresse à l'accélération de l'élément de masse unité dm.*

avec

$$C = -\frac{K}{2}\left(\frac{l_0}{R_0}c\right)^2 \tag{180}$$

qui est la forme des équations de Friedmann. Il est clair que l'on peut toujours définir l_0 pour que la constante K prenne les valeurs $-1, 0, 1$. Pour $K = 1$, $C < 1$ et l'énergie totale est négative. Un effondrement de la sphère est possible. Pour $K = -1$, $C > 1$ et l'expansion ne peut pas être stoppée. Enfin pour $K = 0$, l'énergie totale est nulle, on atteint exactement la vitesse d'évasion. L'expansion s'arrête pour $t \to \infty$.

Propriétés générales des modèles de Friedmann

Les équations de Friedmann en fonction des paramètres cosmologiques. Prenons le cas d'un fluide parfait que l'on peut décrire par une équation d'état de la forme $P = \omega\rho c^2$ avec $0 \leq \omega \leq 1$. Le cas $\omega = 1/3$ correspond à un univers dominé par le rayonnement. Celui $\omega = 0$ est un univers à pression nulle, appelé "univers poussière". Il décrit les propriétés du fluide actuel dominé par la matière.
Dans ce cas, en utilisant les équations (166-b et 169) on peut écrire les équations de Friedmann sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + \dfrac{3P}{c^2}\right)R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2 & (b) \end{cases} \tag{181}$$

En divisant l'équation (181-b) par R_0^2 on obtient

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \tag{182}$$

On définit

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{183}$$

qui est la densité critique de l'univers aujourd'hui. On peut calculer sa valeur en fonction de H_0 :

$$\rho_{0c} = 2. \times 10^{-29} h^2 \mathrm{g.cm}^{-3} = 1.1 \times 10^4 \ h^2 \ \mathrm{eV.cm}^{-3} \tag{184}$$

Avec ce nouveau paramètre, l'équation (182) devient

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \tag{185}$$

L'équation (185) est valide quel que soit t et en particulier pour $t = t_0$. Elle s'écrit alors :

$$\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho_0 \left(\frac{R_0}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \tag{186}$$

soit

$$H_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}\right] = -\frac{kc^2}{R_0^2} \tag{187}$$

En égalisant les membres de droite des équations (186) et (187) on obtient finalement

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(1 - \Omega_0\right) \tag{188}$$

où on définit le paramètre de densité

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \tag{189}$$

Évolution de la densité en fonction du redshift Supposons que $P = \omega \rho c^2$ et ω constant au cours du temps. Comme (voir Eq. 173)

$$d\left(\rho R^3\right) = -\frac{3P}{c^2} R^2 dR \tag{190}$$

on a donc

$$R^3 d\rho + 3R^2 \rho dR = -3\rho\omega R^2 dR \tag{191}$$

soit

$$d\left[\rho R^{3(1+\omega)}\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)} \tag{192}$$

Ainsi,

- pour un *univers "poussière"*, $\omega = 0$, on a

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \ , \tag{193}$$

  soit $\rho = \rho_0(1+z)^3$,
- et pour un *univers dominé par le rayonnement*, $\omega = 1/3$, on a

$$\rho R^4 = \rho_0 R_0^4 \ , \tag{194}$$

  soit $\rho = \rho_0(1+z)^4$.

Dans le cadre d'un univers en expansion qui serait passé par une phase chaude dominée par le rayonnement, il est donc inéluctable que l'on assiste à une transition vers une phase dominée par la poussière, puisque la densité de photons décroît plus vite que celle de la matière.

Existence d'une singularité : Big Bang Les modèles d'univers avec $-1/3 \leq \omega \leq 1$ possède une singularité à $t = 0$ où la densité diverge.
En effet, compte tenu de (192) on a

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} \ . \tag{195}$$

Par ailleurs, on peut transformer l'équation (188) et la mettre sous la forme

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2\,(1-\Omega_0) \tag{196}$$

soit, en utilisant (195)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - H_0^2\Omega_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2\,(1-\Omega_0) \tag{197}$$

et donc, on peut décrire l'évolution du paramètre de Hubble

$$H^2(t) = H_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[\Omega_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1-\Omega_0)\right] \tag{198}$$

Supposons qu'à $t = t_0$ l'univers soit en expansion : $\dot{R} > 0$. D'après l'équation (181-a) $\ddot{R} < 0$ quel que soit t si $\rho + 3P/c^2 > 0$, c'est à dire $1 + 3\omega > 0$ (car $\rho > 0$!).
$R(t)$ est donc concave, et $R/\dot{R} = 1/H$ est une échelle de temps caractéristique. Le Big Bang est donc inévitable dans tous les modèles d'univers homogènes et isotropes constitués de fluides d'équation d'état $P = \omega\rho c^2$ avec $\omega > -1/3$ (figure 44).
Il faut bien souligner que le Big Bang n'est pas du à un effet de pression mais aux conditions initiales décrivant un univers homogène et isotrope.

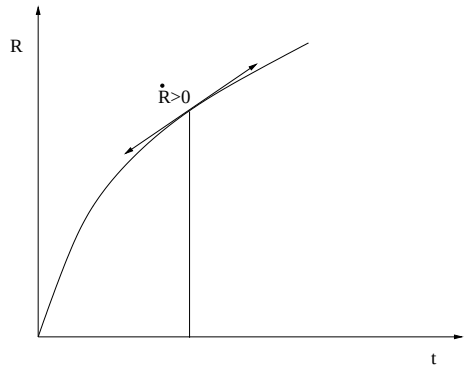

Figure 44.: *Illustration de la singularité initiale inévitable dans le cas des fluides considérés dans ce cours pour les univers homogènes et isotropes.*

5.3 Cas du modèle Einstein-de Sitter : $\Omega = 1$

Pour $\Omega = 1$, l'équation (198) se réduit à

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 \left(1+z\right)^{1+3\omega} ; \tag{199}$$

soit

$$R^{\frac{1+3\omega}{2}} \dot{R} = H_0 R_0 R_0^{\frac{1+3\omega}{2}} \tag{200}$$

donc

$$R^{\frac{3}{2}(1+\omega)-1} \dot{R} = \frac{2}{3\left(1+\omega\right)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[R^{\frac{3}{2}(1+\omega)}\right] = H_0 R_0^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \tag{201}$$

qui s'intègre immédiatement. L'évolution temporelle du facteur d'expansion est donc

$$R(t) = \left[\frac{3H_0\left(1+\omega\right)}{2}\right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} R_0 \; t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \tag{202}$$

où

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \tag{203}$$

Connaissant l'évolution de $R(t)$ et sachant que $\rho R^{3(1+\omega)} = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$ on peut déterminer l'évolution de tous les paramètres du modèle :

$$\begin{cases} H(t) = \dfrac{2}{3\left(1+\omega\right)t} = H_0 \dfrac{t_0}{t} = H_0 \left(1+z\right)^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \\ q = -\dfrac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \dfrac{1+3\omega}{2} = q_0 \\ \rho = \rho_0 \left(\dfrac{t_0}{t}\right)^2 = \dfrac{1}{6\pi G \left(1+\omega\right)^2 t^2} \\ \rho_{0c} t_0^2 = \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} t_0^2 = \dfrac{1}{6\pi G \left(1+\omega\right)^2} \end{cases} \tag{204}$$

Cas du modèle dominé par le rayonnement : $\omega = 1/3$

$$\begin{cases} \rho(t) = \dfrac{3}{32\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{1/2} \\ t = t_0 \left(1+z\right)^{-2} \\ H = \dfrac{1}{2t} = H_0 \left(1+z\right)^2 \\ q_0 = 1 \\ t_{0c} = t_0 = \dfrac{1}{2H_0} \end{cases} \tag{205}$$

Cas du modèle poussière : $\omega = 0$

$$\begin{cases} \rho(t) = \dfrac{1}{6\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{2/3} \\ t = t_0 \left(1+z\right)^{-3/2} \\ H = \dfrac{2}{3t} = H_0 \left(1+z\right)^{3/2} \\ q_0 = \dfrac{1}{2} \\ t_{0c} = t_0 = \dfrac{2}{3H_0} \end{cases} \tag{206}$$

Il est important de remarquer la différence entre les deux cas ci-dessus car ce sont les deux modèles de référence en cosmologie. Les comportements de la croissance du facteur d'expansion illustrent bien les deux grandes époques de l'évolution de notre univers.

5.4 Cas des modèles courbes : $\Omega \neq 1$

Exprimons l'équation (198) en fonction du redshift :

$$H(t)^2 = H_0^2 \left(1+z\right)^2 \left[\Omega_0 \left(1+z\right)^{(1+3\omega)} + \left(1-\Omega_0\right)\right] \ . \tag{207}$$

Il existe donc une période où le terme $1-\Omega_0$ peut être négligé. Elle correspond à cas où

$$\frac{R_0}{R} = 1+z \gg \left|\frac{1}{\Omega_0} - 1\right|^{\frac{1}{1+3\omega}} = \frac{R_0}{R^*} = 1+z^* \tag{208}$$

et donc pendant la période initiale $0 \leq R \leq R^*$ le comportement de l'univers est décrit par une évolution relativement simple de $H(t)$

$$H^2 \approx H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)} = H_0^2 \Omega_0 \left(1+z\right)^{3(1+\omega)} \tag{209}$$

Ce comportement est tout à fait analogue au cas Einstein-de Sitter en substituant $H_0\Omega_0$ à H_0. Par conséquent pendant la phase initiale d'expansion tous ces modèles ont un comportement identique (figure 45).

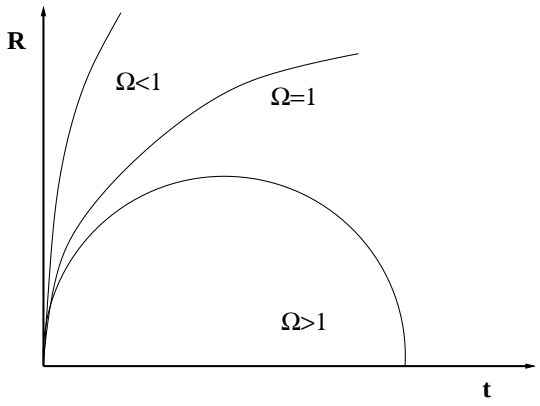

Figure 45.: *Évolution du facteur d'échelle pour les trois types de modèles d'univers. À l'origine les trois modèles fusionnent ce qui conduit à un comportement identique à* $t = 0$.

6. Description des 3 modèles standards

6.1 Cas du modèle poussière $\omega = 0$

L'équation (198) peut s'écrire simplement

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) + 1 - \Omega_0\right] \tag{210}$$

Posons $x = R/R_0$

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}} \tag{211}$$

En prenant comme conditions initiales $t = 0$, $R(t = 0) = 0$ on a donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 - \frac{\Omega_0}{x}}} \tag{212}$$

L'âge de l'Univers est donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}} \tag{213}$$

Ce qui signifie que pour $\Omega > 0$, $t < 1/H_0$.

Modèle euclidien : $k = 0$ On a $\Omega = 1$, $\rho = \rho_c$ (densité critique) et donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \sqrt{x} \tag{214}$$

L'âge de l'Univers est $t_0 = 2/(3H_0)$ soit approximativement 10^{10} ans.

Modèle elliptique (fermé) $k = 1$, $\Omega > 1$. On a $\rho_0 > \rho_c$.
Posons

$$1 - \cos\theta = 2\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \quad ; \quad \sin\theta d\theta = 2\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} dx \tag{215}$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\Omega_0 - 1)\left[-1 + \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)x}\right]}} \tag{216}$$

et donc

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \left[-1 + \frac{2}{1 - \cos\theta}\right]^{-1/2} \sin\theta d\theta \tag{217}$$

Avec $u = -\cos\theta$, on obtient

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du \tag{218}$$

soit

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\mathrm{Arcsin}\left[u - \sqrt{1 - u^2}\right]\right] \tag{219}$$

D'où l'expression de t et du facteur d'expansion x :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\theta - \sin\theta\right] \tag{220}$$

$$x = \frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2\left(\Omega_0 - 1\right)} \left[1 - \cos\theta\right] \tag{221}$$

qui est la courbe paramétrique d'une cycloïde.
Les points caractéristiques sont

$$\theta = 0 \rightarrow R = 0 \tag{222}$$

$$\theta = \pi \rightarrow R = R_{max} = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \qquad \text{pour} \qquad t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0 \left(\Omega_0 - 1\right)^{3/2}} \tag{223}$$

$$\theta = 2\pi \rightarrow R = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 2t_{max} \tag{224}$$

L'âge de l'univers est alors

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\left[\text{Arcos}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right) - \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0 - 1)^{1/2}\right] \quad < \frac{2}{3H_0} \tag{225}$$

À titre d'exemple, pour $\Omega = 2$ et $H_0 = 100$ $t_0 \approx 6 \times 10^9$ ans, le maximum d'expansion se produit à

$$t_{max} \approx 3.2 \times 10^{10} \text{ ans} . \tag{226}$$

Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1$, $\Omega < 1$. On a donc $\rho_0 < \rho_c$. On établit les mêmes équations que précédemment en substituant $i\varphi = \theta$ à θ. On trouve alors

$$t = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}}\left[\text{sh}\varphi - \varphi\right] \tag{227}$$

et

$$R = \frac{R_0}{2}\frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_0)}\left[\text{ch}\varphi - 1\right] \tag{228}$$

et l'âge de l'univers s'écrit donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\frac{1}{(1 - \Omega_0)}\left[1 - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{1/2}}\text{Argch}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)\right] \quad > \frac{2}{3H_0} \tag{229}$$

6.2 Cas des modèles radiatifs $\omega = 1/3$

On a dans ce cas

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_r\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + (1 - \Omega_r)\right] \tag{230}$$

où $\Omega_r = \Omega$ pendant la période radiative.
Il faut noter que le terme (R_0/R) est maintenant au carré. Dans ce cas, on a

$$R = R_0\left(2H_0\Omega_r^{1/2}t\right)^{1/2}\left[1 + \frac{1 - \Omega_r}{2\Omega_r^{1/2}}H_0 t\right]^{1/2} \tag{231}$$

7. Modèles à constante cosmologique

L'introduction de la constante cosmologique dans les équations d'Einstein ajoute un terme supplémentaire dans les équations de Friedmann (181-a,b) :

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + \dfrac{3P}{c^2}\right) R + \dfrac{\Lambda}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dfrac{\Lambda}{3} R^2 & (b) \end{cases} \tag{232}$$

On peut d'ores et déjà prédire ses effets potentiels sur le facteur d'expansion en remarquant qu'elle s'apparente à un terme de pression négative dans l'équation (232). Pour certaines valeurs de Λ on doit donc s'attendre à une expansion renforcée, même pour des modèles d'univers à densité de matière sous-critique.
On utilise plutôt la constante cosmologique réduite qui intervient dans le terme de courbure :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \, . \tag{233}$$

On constate immédiatement que Ω_Λ est la racine carré de l'inverse d'une longueur. L'échelle caractéristique est fixée naturellement pour

$$\Omega_\Lambda \approx 1 \Longrightarrow L \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \, \frac{c}{H_0} \approx 1.7 \; h^{-1} Gpc \, . \tag{234}$$

Cette distance fixe l'échelle à partir de laquelle la densité d'énergie du vide devrait contribuer de façon significative à la géométrie de l'espace-temps. La courbure de l'univers est donc constituée d'un terme de plus :

$$\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \tag{235}$$

avec

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 R^2} \qquad \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \tag{236}$$

et le paramètre de décélération d'un univers à pression nulle devient

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \, . \tag{237}$$

L'introduction d'une constante cosmologique affecte la dynamique de l'univers. En particulier l'évolution du facteur d'échelle s'écrit

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda \right] \, , \tag{238}$$

où le paramètre de densité $\Omega_m = \Omega(t=0)$ est maintenant clairement identifié comme la contribution matérielle à la courbure de l'univers. En effectuant les changements de variable ($[R(t); \dot{R}(t)] \rightarrow [z; t]$) on peut exprimer le temps écoulé entre z et $z = 0$:

$$t(0) - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} \quad (239)$$

d'où l'on déduit l'expression de $H(z)$:

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} \; . \quad (240)$$

qui montre comment l'âge de l'Univers dépend de la constante cosmologique. De la même façon la coordonnée radiale de la métrique peut être calculée :

$$r(z) = \mathrm{Sinn}\left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} \mathrm{d}z \right] \quad (241)$$

ou

$$r(z) = \mathrm{Sinn}\left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \chi(z) \right] \; , \quad (242)$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{Sinn}(x) = \mathrm{sh}(x) & \text{si} \quad 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda > 0 \\ \mathrm{Sinn}(x) = x & \text{si} \quad 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda = 0 \\ \mathrm{Sinn}(x) = \sin(x) & \text{si} \quad 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda < 0 \end{cases} \quad (243)$$

Le volume $V(z)$ est alors

$$V(z) = \frac{1}{2H_0^3} \left[\frac{\mathrm{Sinn}\left[2 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \right] \chi(z)}{|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} - \chi(z) \right] \quad (244)$$

Les distance angulaire et luminosité sont donc aussi modifiées

$$d_A = c(1+z)^{-1} H_0^{-1} |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{-1/2} \mathrm{Sinn}\left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} \mathrm{d}z \right] \quad (245)$$

On s'attend donc à des prédictions différentes des modèles standards (sans constante cosmologique) sur tous les observables : magnitudes apparentes, comptages de galaxies, évolution de la fraction d'amas de galaxies, champs de vitesse à grande échelle, fluctuations des anisotropies du fond diffus cosmologique. La figure 46 illustre la multitude de modèles qu'engendre l'introduction d'une constante cosmologique.

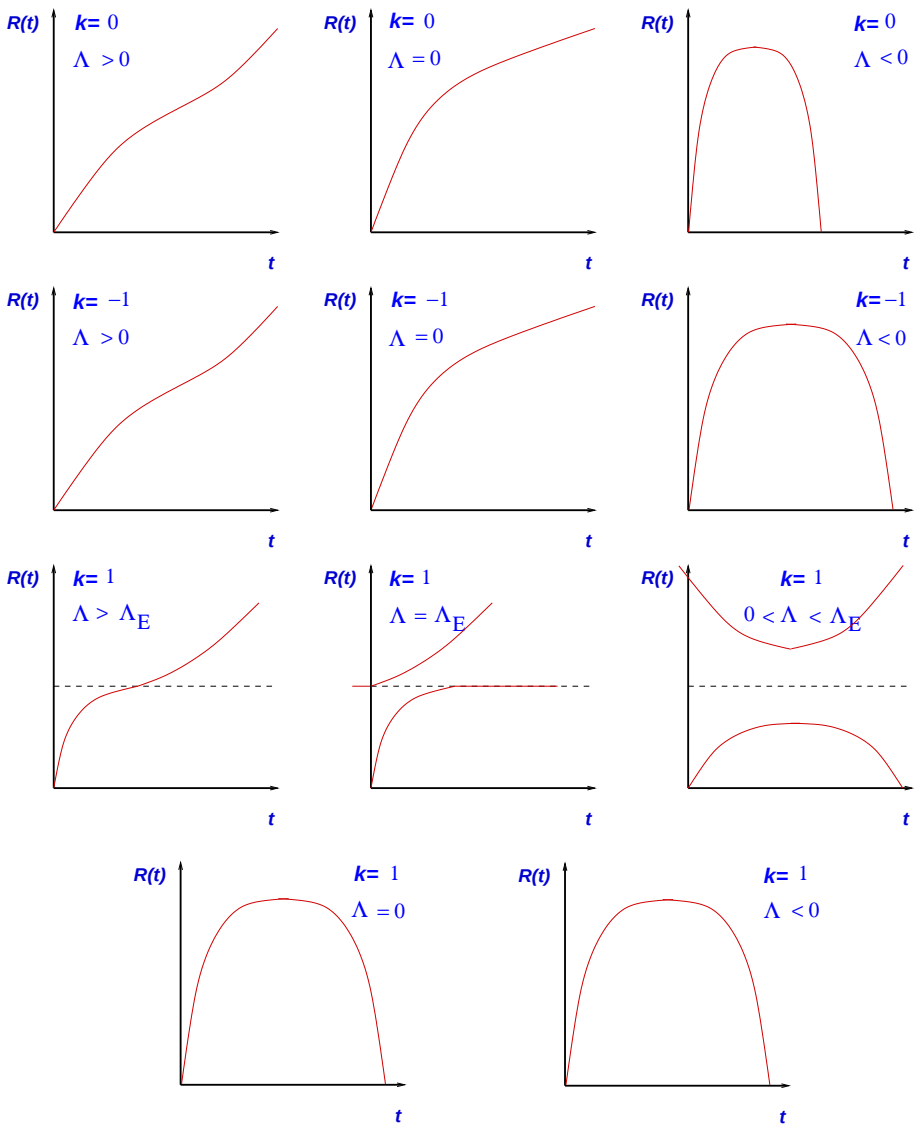

Figure 46.: *Tableau récapitulatif des modèles cosmologiques homogènes et isotropes en fonction de la valeur de la courbure, k et de la constante cosmologique, Λ (Ω_Λ). Λ_E correspond à la valeur critique d'Einstein permettant de construire un univers statique.*

8. Analyse rétrospective de quelques faits observationnels

8.1 Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann

On peut maintenant étendre les calculs détaillés en Section (6.2) dans l'approximation des petits z, mais cette fois pour toute valeur de z et pour les trois cosmologies standards en explicitant cette fois le rôle de Ω_0. La coordonnée radiale $r(t)$ est donnée par

$$f(r) = \int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{(1-kr^2)^{1/2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{c\mathrm{d}R}{R\dot{R}} \ . \tag{246}$$

En substituant aux termes R_i l'expression $R_0\,(1+z_i)^{-1}$ et à $\dot{R}$ les expressions calculées avec les équations précédentes (notamment Eq. (198)), on trouve

$$f(r) = \frac{c}{R_0 H_0} \int_{\frac{1}{(1+z)}}^{1} \left[1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{247}$$

soit

$$r = \frac{c}{H_0 R_0 \Omega_0^2\,(1+z)} \left[2\Omega_0 z + (2\Omega_0 - 4)\left(\sqrt{1+\Omega_0 z} - 1\right)\right] \tag{248}$$

d'où l'on déduit la distance angulaire

$$d_A = R_0 r(z)\,(1+z)^{-1} = \frac{c}{H_0}\frac{r(z)}{(1+z)} \tag{249}$$

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2\,(1+z)^2} \left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)\left(\sqrt{1+\Omega_0 z} - 1\right)\right] \ . \tag{250}$$

Il est facile de retrouver les expressions (136-140) pour les petits z à partir de ces calculs. On peut noter aussi que lorsque $z >> 1$ on a

$$d_A(z) \approx \frac{2}{H_0 \Omega_0 z} \ . \tag{251}$$

8.2 Le problème de l'horizon

L'âge fini de l'univers et la vitesse finie de la lumière, impliquent qu'il existe une distance maximale parcourue par un photon depuis l'origine de l'univers jusqu'à un temps t. Cette distance est appelée *l'horizon*; c'est une quantité très importante puisqu'elle definit la taille de l'univers observable. Sa détermination n'est pas immédiate car elle dépend de la façon dont se déroule l'expansion de l'univers.

La distance radiale comobile, r, correspondant à la distance traversée par un photon est

$$r = \int_0^t \frac{c\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_\infty^0 \frac{1}{R_0}(1+z)\,c\mathrm{d}t \tag{252}$$

et la taille de l'horizon d_H à l'époque t est donc

$$d_H(t) = R(t)\int_0^{r_H} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t)\int_0^t \frac{c\mathrm{d}t'}{R(t')} = \frac{1}{1+z}\int_\infty^0 (1+z)\,c\mathrm{d}t\ . \tag{253}$$

Elle peut donc être calculée pour les différents modèles d'univers.
L'horizon dépend du modèle cosmologique et change au cours du temps. Pour le cas le plus simple d'un univers Einstein-de Sitter on démontre facilement que, pour la période actuelle,

$$d_H(t) = 3ct \tag{254}$$

pour la période radiative

$$d_H(t) = 2ct \tag{255}$$

Il n'est pas vraiment surprenant que $d_H(t)$ soit de l'ordre de ct puisqu'il s'agit de distance parcourue par les photons.
Le *problème de l'horizon* peut s'exprimer ainsi. À la surface de dernière diffusion[9], la taille de l'horizon correspond à celle attendue à $z = 1000$ dans un univers dominé par le rayonnement. On peut facilement la calculer pour tous les modèles d'univers et en déduire aussi la dimension angulaire dans le ciel, θ_H

$$\theta_H = \frac{d_H(t)}{d_A} \tag{256}$$

où d_A vaut $2c/H_0\Omega_0$ (cas où $\Omega z >> 1$). On a donc

$$\theta_H = 1.8\Omega_0^{1/2}\mathrm{deg}. \tag{257}$$

Par conséquent on ne peut pas avoir d'événements ayant des liens causaux sur des échelles angulaires supérieures à 2 degrés. Le problème est donc de comprendre pourquoi le fond diffus cosmologique est isotrope sur tout le ciel et que les fluctuations n'excèdent nulle part des variations relatives de température supérieures à 10^{-5}.
Ce problème est résolu dans les modèles d'inflation qui proposent une phase d'expansion exponentielle de l'univers.

---

[9]Je n'en ai pas encore parlé ; voir la section 11 sur l'histoire thermique de l'Univers

8.3 Le problème de la platitude

Connaissant la relation entre Ω et H, on peut exprimer l'évolution temporelle de Ω. D'une part

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \tag{258}$$

et d'autre part

$$H(z) = H_0\sqrt{(1+z)^2\,(1+\Omega_m z) - z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda}\ . \tag{259}$$

Prenons par exemple le cas ($k = 0\,;\ \Omega_\Lambda > 0$), Il est facile de montrer à partir de (258) et (259) que

$$\Omega = \frac{\Omega_0\,(1+z)^3}{\Omega_0\,(1+z)^3 + 1 - \Omega_0}\ . \tag{260}$$

Par conséquent, Ω était nécessairement très proche de l'unité à grand redshift. En inversant l'équation (260), on peut se rendre compte à quel point c'est critique : si $\Omega = 0.998$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 = 1.5 \times 10^{-7}$ ce qui est évidemment totalement irréaliste. De même, si $\Omega > 1$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 < 0$!! Ce constat, qui n'est pas particulier aux modèles d'univers à courbure nulle et constante cosmologique, exprime le *problème de la platitude* : pourquoi Ω était-il si proche de l'unité ?

8.4 Comptage en fonction du redshift

Soit $\mathrm{d}N$ nombre de galaxies dans un volume $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}N = n(z)\mathrm{d}V\ , \tag{261}$$

où $n(z)$ est la densité comobile. Si l'on suppose que le nombre de galaxies est conservé, alors $n(z) = n_0\,(1+z)^3$. Le nombre de galaxies observées dans l'intervalle de redshift $\mathrm{d}z$, dans un angle solide $\delta\Omega$ est donc

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = n(z)d_A^2\frac{\mathrm{d}l\delta\Omega}{\mathrm{d}z} \tag{262}$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}z} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = c\frac{1}{\dot{R}}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} = \frac{c}{H(z)\,(1+z)}\ . \tag{263}$$

Sachant que

$$H(z) = H_0\sqrt{(1+z)^2\,(1+\Omega_m z) - z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda} \tag{264}$$

et que

$$d_A = \frac{c\,(1+z)}{H_0\,|1-\Omega_m-\Omega_\Lambda|^{1/2}} \\ \mathrm{Sinn}\left[|1-\Omega_m-\Omega_\Lambda|^{1/2}\int_0^z \left[(1+z)^2\,(1+\Omega_m z)-z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda\right]^{-1/2}\mathrm{d}z\right] \tag{265}$$

On peut donc prédire les comptages des galaxies en fonction des modèles cosmologiques et les comparer notamment aux grands relevés spectroscopiques.

- Cas $k=0,\Omega_\Lambda=0$:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega}{H_0^3}\frac{\left(\sqrt{1+z}-1\right)^3}{(1+z)^{5/2}} \tag{266}$$

- Cas $\Omega_m=0.1,\Omega_\Lambda=0$:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega_m}{H_0^3}\frac{\left[\Omega_m z+(\Omega_m-2)\left(\sqrt{1+\Omega_m z}-1\right)\right]^2}{\Omega_m^4\,(1+z)^3\,\sqrt{1+\Omega_m z}}\,. \tag{267}$$

La figure 47 montre les prédictions pour 5 modèles cosmologiques ($c=1$).

8.5 Profondeur optique

Par définition la profondeur optique τ est définie par

$$\tau = \int n(z)\sigma(z)\,\mathrm{d}l\,, \tag{268}$$

où $n(z)$ est la densité numérique comobile de particules et $\sigma(z)$ la section efficace comobile. Dans le cas d'un univers dominé par la matière les équations (263) et (264) de la section précédente nous permettent d'exprimer τ en fonction du redshift :

$$\tau(z) = \int n(z)\sigma(z)\,\frac{c}{H_0}\frac{1}{\sqrt{(1+z)^2\,(1+\Omega_m z)-z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z}\,. \tag{269}$$

Applications :

- Cas de la diffusion Thomson dans un milieu ionisé :
  Dans ce cas, la conservation de la densité comobile d'électrons implique que

$$n_e(z) = n_{e,0}\,(1+z)^3\,. \tag{270}$$

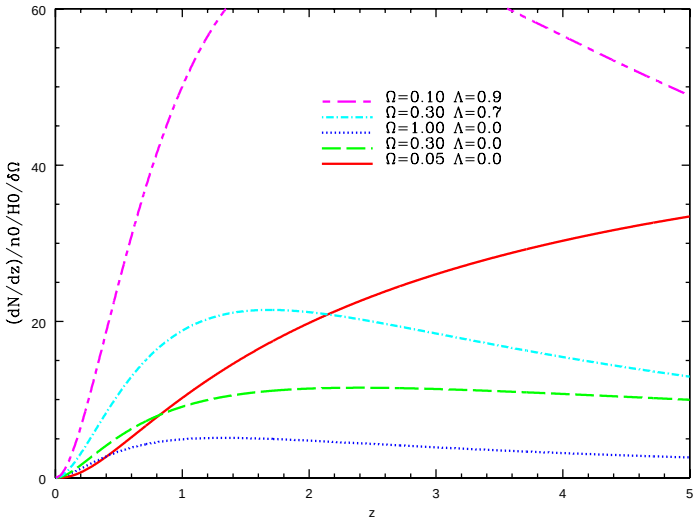

Figure 47.: *Comptage des galaxies par élément de redshift en fonction du modèle cosmologique.*

Or

$$n_{e,0} = \frac{\rho_0}{m_p} = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0}{m_p} , \tag{271}$$

où m_p est la masse du proton et $\rho_{0,c}$ la densité critique actuelle. Donc

$$\tau(z) = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0\sigma_T c}{m_p H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} (1+z)^2 \, \mathrm{d}z \, . \tag{272}$$

Par exemple, pour un univers avec ($\Omega_0 = 1$;$\Omega_\Lambda = 0$),

$$\tau(z) = 0.045 \; h \; f_{b,i} \left[(1+z)^{3/2} - 1\right] , \tag{273}$$

où $f_{b,i}$ est la fraction de baryon ionisé.

– Cas des effets statistiques de lentille gravitationnelle :
Dans ce cas, la conservation du nombre de galaxies (ce qui n'est pas réaliste....) implique de la même façon :

$$n_g(z) = n_{g,0}(1+z)^3 \, . \tag{274}$$

et la section efficace d'interaction est donnée par la section de la galaxie :

$$\sigma(z) = \pi R_g^2 \, . \tag{275}$$

Pour ce cas simple, la profondeur optique est donc

$$\tau(z) = \frac{n_{g,0}\pi R_g^2 c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2\,(1+\Omega_m z) - z\,(2+z)\,\Omega_\Lambda}} (1+z)^2\,\mathrm{d}z\ . \tag{276}$$

Pour un univers $\Omega_0 = 1\,;\Omega_\Lambda = 0$, on a donc :

$$\tau(z) = \frac{2}{3}\frac{n_{g,0}\pi R_g^2 c}{H_0}\,(1+z)^{3/2}\ . \tag{277}$$

Ainsi, pour une galaxie de 10 kpc de rayon et avec $n_{g,0}$ donnée par la fonction de luminosité des galaxies : $n_{g,0} \approx 0.01$ gal.Mpc^{-3} :

- $\tau(z = 0.3) = 0.008$;
- $\tau(z = 1) = 0.02$;
- $\tau(z = 30) = 1$.

8.6 L'effet Sunyaev-Zeldovich

Lorsque les photons du mileu intergalactique traversent le gaz chaud intra-amas ils interagissent avec les électrons de ce gaz par diffusion Compton. C'est en particulier le cas des photons du fond diffus cosmologique. La diffusion transfert l'énergie des photons du fond diffus aux électrons qui la réémettent ensuite à plus haute fréquence. Cette redistribution spectrale se traduit par une modification spatiale des propriétés du fond diffus qui apparaît sous la forme d'un décrément apparent de la carte de température autour de l'amas de galaxies. C'est l'effet Sunyaev-Zeldovich thermique.
La carte de température observée à la distance radiale R du centre de l'amas est alors

$$\frac{\Delta T(R)}{T_{CMB}} = -2\frac{k_B\sigma_T}{m_e c^2}\int n_e(l)T_e(l)\mathrm{d}l = -2y\ , \tag{278}$$

où n_e, m_e, $T_e(R)$ sont respectivement la densité numérique, la masse et la température des électrons du gaz, σ_T la section efficace de diffusion Thomson (6.65×10^{-25} cm^2), T_{CMB} est la température du fond diffus cosmologique, R est le rayon projeté et $\mathrm{d}l = c\ \mathrm{d}t$ est la longueur du trajet du photon dans le gaz chaud. La quantité y s'appelle le *paramètre-y de Compton*.
La cartographie de la déplétion (figure 48) est un moyen de sonder la quantité de baryons chauds dans les amas de galaxies. Cette méthode est très complémentaire de l'analyse des cartes X. En effet, le rayonnement de freinage thermique dépend de la densité électronique comme n_e^2

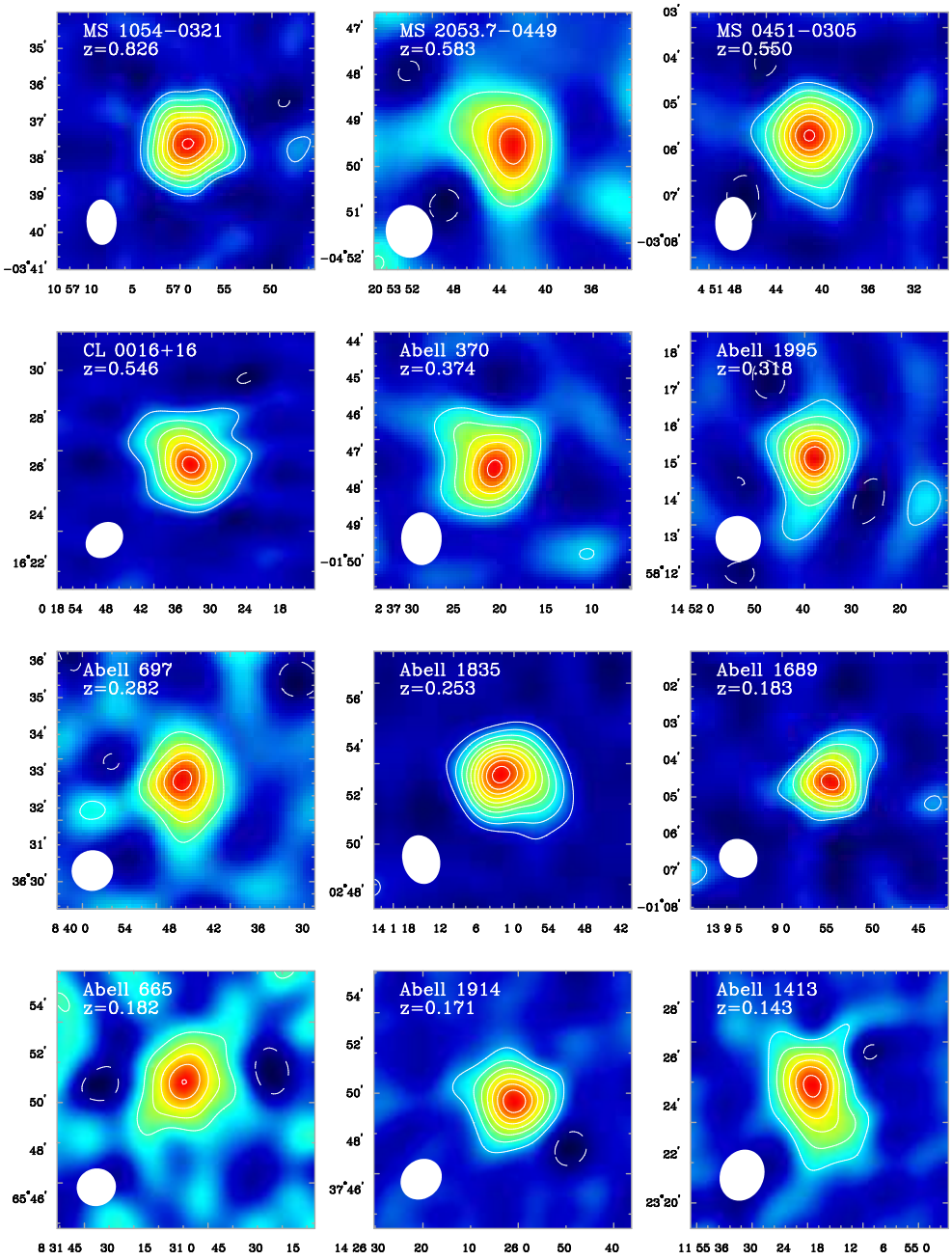

Figure 48.: *Cartographie de la déplétion SZ de 12 amas de galaxies lointains. Les contours sont des isothermes observées avec les détecteurs millimétriques ORVO et BIMA. On voit que la température décroît vers l'intérieur progressivement avec l'amplitude de l'effet SZ. L'ellipse blanche en bas à gauche donne la résolution effective de l'instrument (d'après Carlstrom et al 1999).*

alors que l'effet SZ en dépend comme n_e. On peut donc en couplant les deux méthodes estimer les effets des sous-structures dans le gaz, voire construire une carte tri-dimensionnelle de la distribution de matière. Par ailleurs, l'émissivité X dépend de la constante de Hubble comme $h^{1/2}$ alors que dans l'effet SZ la dépendance est en h. En supposant donc que l'on soit en mesure de produire une analyse détaillée de la distribution de matière dans l'amas, on peut déduire une valeur de h.
Plus remarquable encore, comme le montre l'expression de y, l'amplitude de l'effet SZ est indépendante du redshift de l'amas responsable de la diffusion Compton. C'est une conséquence immédiate du fait que y est le rapport de deux températures qui subissent les mêmes effets du "Dimming-factor". On peut donc observer par cette méthode des amas de galaxies lointains sans être affecté par les atténuations produites par les effets de distance.

9. Mesure des paramètres cosmologiques

La mesure des paramètres cosmologiques désigne les méthodes et les résultats concernant les quatre quantités H_0, Ω_m, Ω_Λ et q_0. En fait, pour explorer en détail les scénarios cosmologiques il faut aussi inclure l'âge de l'Univers, la description du spectre de puissance des fluctuations de densité (forme, notamment l'indice s'il s'agit d'une loi de puissance, et normalisation (σ_8)) et la nature des fluctuations (gaussiennes, fraction de défauts topologiques). Le degré de dégénérescence des contraintes est en général important et il faut être très vigilent au sens et à la portée réelle des résultats discutés dans la littérature.
D'une façon générale, mesurer les paramètres cosmologiques au sens large devrait inclure toutes les quantités suivantes :

- Description de la géométrie et du contenu de l'Univers :
  - H_o : constante de Hubble
  - Ω_k : courbure de l'univers
  - Ω_Λ : Constante cosmologique
  - Ω_w : contenue en "*énergie noire*" (autre que Ω_Λ et génériquement qualifiée par le terme "quintescence")
  - Ω_b : fraction de matière baryonique
  - Ω_m : fraction de matière totale (baryon, matière noire chaude et/ou froide)
  - Ω_c : fraction de matière noire froide
  - Ω_γ : fraction de photons
- Description astrophysique du milieu

  - τ : profondeur optique de re-ionisation à la période du découplage
- Description de la physique de l'univers primordiale
  - C_{10} : normalisation du spectre de puissance des fluctuations de densité initiales
  - n_s : indice de la composante scalaire du spectre du puissance des fluctuations
  - n_T : indice de la composante tensorielle du spectre du puissance des flucuations
  - r : rapport des amplitudes scalaires et vectorielles.

Si l'on disposait d'informations concernant tous ces paramètres, nous serions en mesure d'apporter d'énormes contraintes sur l'univers et son histoire. En particulier, nous pourrions confronter les scénarios d'inflation aux observations. Malheureusement, nous sommes encore loins d'y parvenir, même si des progrès rapides et spectaculaires ont été accomplis. Il est important de mesurer le sens et les limites actuelles des résultats qui sont résumés dans cette section, même si se dessine progressivement un scénario cohérent.
On peut d'ores et déjà calculer la fraction de photons. Le rayonnement fossile cosmologique représentant plus de 90% des photons, il suffit de déterminer

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_{CMB}}{\rho_{ctitic}} \ . \tag{279}$$

D'après l'Eq. (59) on déduit donc que

$$\Omega_\gamma = \frac{4.8\ 10^{-34}}{1.88\ 10^{-29}\ h^2} = 2.55 \times 10^{-5}\ h^{-2} \tag{280}$$

9.1 Mesure de H_0

La mesure de H_0 fait partie des grandes aventures à rebondissement de la cosmologie. Ce fut sans doute la constante la plus controversée et, de fait, la plus fluctuante des 50 dernières années. Elle est restée longtemps dans une fourchette $50 < H_0 < 100$ sans qu'une valeur finale n'émerge. En fait, la discussion autour de la valeur de la constante de Hubble est un exemple caractéristique des problèmes techniques auxquels les astronomes doivent faire face. C'est un problème de définition et de calibration de calibrateurs de distance, de précision des mesures astronomiques et de définition d'échantillons non biaisés.
Les techniques de mesure de H_0 relèvent pour la plupart de problème d'échelle de distance. La difficulté est progressive au fur et à mesure que

la distance des indicateurs et des galaxies croissent. Sommairement, on distingue trois classes formant une hiérarchie qui caractérise leur portée en distance : les calibrateurs primaires, secondaires et tertiaires. Les indicateurs primaires sont bien sûr les plus robustes et les mieux contrôlés. Ils sont calibrés sur des objets astronomiques de notre Galaxie. Les indicateurs tertiaires sont les moins sûrs.
Pour pallier aux difficultés techniques et aux erreurs systématiques il est indipensable de disposer d'indicateurs de distance et/ou de méthodes de mesure de H_0 indépendantes. C'est la raison pour laquelle il en existe une multitude. D'une façon générale on peut dire qu'il existe deux types de techniques : celles qui mesurent H_0 dans notre environnement proche ($D < 100$ Mpc) et celles qui mesurent H_0 sur des échelles cosmologiques. Céphéides, TRGB (*Tip of the Red Giant Branch*), GCLF (*Globular Cluster Luminosity Function*), Baade-Wiesselink, SBF (*Surface Brightness Fluctuation*), Faber-Jackson, Tully-Fisher et SNIa sont les méthodes les plus connues des méthodes locales. Elles présentent l'avantage de pouvoir être bien calibrées. SNIa, SZ, et décalage temporel induit par les lentilles gravitationnelles sont des techniques non-locales. Elles ne sont pas sensibles aux variations locales des champs de vitesse produits par le Superamas Local qui peuvent créer des biais dans la valeur locale de H_0. Sans entrer dans les détails de toutes ces approches, je résume dans la Table 1 le status des mesures selon les approches. Tout confondu il ressort que

$$H_0 = 63 \pm 15 \text{ km.sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1} . \tag{281}$$

Cependant, cette moyenne n'a pas grand sens car il faudrait la pondérer par la fiabilité des méthodes. En particulier l'approche SZ est encore à valider car peu d'amas ont été analysés et les résultats dépendent fortement du modèle de potentiel gravitationnel utilisé. De même, en ce qui concerne les méthodes traditionnelles, il faut aussi effectuer des pondérations. En prenant en compte ces performances relatives, on peut dire que pour le moment

$$H_0 = 68 \pm 15 \text{ km.sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1} . \tag{282}$$

9.2 De la mesure du rapport M/L à Ω_m

L'intérêt cosmologique de mesurer la masse des systèmes gravitants est contenu dans l'évaluation des rapports M/L[10]. Ils permettent en effet de donner un ordre de grandeur de la contribution de chaque système

[10]Je rappelle que ce rapport est évalué relativement au rapport $M_\odot/L_\odot$

Méthode	H_0
Méthodes traditionnelles (toutes confondues)	74 ± 10
Baade-Wiesselink	60 ± 10
Cepheid HST	58 ± 10
SnIa	64 ± 3
SZ	55 ± 17
Décalage temporel	64 ± 13

Table 1.: *Court résumé des valeurs de H_0 suivant les méthodes. Sous le chapeau "Méthodes traditionnelles" se cachent une multitude d'approches, notamment celles utilisant les variables Céphéides, RR-Lyrae, W-Virginis, les méthodes utilisant les fonctions de luminosités des amas globulaires et des nébuleuses planétaires, celles fondées sur les relations de Tully-Fisher, Faber-Jackson ou sur les fluctuations de brillance de surface des galaxies. La méthode de Baade-Wiesselink utilise l'expansion des enveloppes des novae ou supernovae. La méthode "SNIa" utilise la magnitude apparente des supernovae au pic de luminosité et l'évolution des courbes de lumière apparente des supernovae. La méthode du "décalage temporel" utilise les effets de lentille gravitationnelle qui engendre des décalages temporels des événements identiques survenant sur différentes images de la même source.*

physique observé à Ω_m.
Nous avons vu dans la Section (4.1) que la densité de lumière des galaxies, ρ_L était donnée par la fonction de luminosité. Pour une loi de Schechter, les observations les plus récentes donnent

$$\rho_L = 2. \pm 1. \times 10^8 \ h \ L_\odot \mathrm{Mpc}^{-3} \ . \tag{283}$$

Par ailleurs, nous avons calculé la densité critique de l'univers

$$\rho_{crit} = 1.88 \ h^2 \times 10^{-29} \mathrm{g.cm}^{-3} = 2.75 \ h^2 \times 10^{11} \ M_\odot \mathrm{Mpc}^{-3} \ . \tag{284}$$

On peut donc calculer le rapport M/L critique correspondant à une densité de matière d'un univers ayant la densité critique :

$$\left(\frac{M}{L}\right)_{crit} = \frac{\rho_{crit}}{\rho_L} = 1375 \ h \pm 50\% \ . \tag{285}$$

Cette valeur est donc une référence qui permet d'affecter un paramètre Ω_i à toutes les composantes i pour lesquelles un rapport M/L moyen sur une vaste population d'objets peut être calculé. Il est déterminé par

$$\Omega_i = \frac{\langle M/L \rangle_i}{(M/L)_{crit}} \tag{286}$$

Galaxies. Les masses des galaxies elliptiques peuvent être déterminées de plusieurs façons : comparaison du profil de lumière à un profil de masse d'une sphère isotherme ayant la dispersion de vitesse des étoiles (mesurée par la largeur des raies stellaires), analyse dynamique par le théorème du viriel, analyse du gaz émetteur X des galaxies selon la même procédure que celle décrite pour les amas de galaxies en Section (11.2.3), analyse dynamique des galaxies à coquilles. Le rapport M/L médian est d'environ 30 (avec une grande dispersion).
Les masses des galaxies spirales sont déterminées par la modélisation des courbes de rotation plates en ajustant un profil à deux composantes représentant le disque et un halo (voir figure). Les rapport M/L sont d'environ 10 à 30.

Groupes de galaxies. Les groupes de galaxies sont principalement analysés par le théorème du viriel ou l'analyse du gaz X. Les résultats concernant leur masse sont très dispersés. Il n'est pas encore clair si les groupes forment un ensemble homogène avec des propriétés dynamiques identiques car ils présentent une grande disparité en morphologie. Difficile de donner un rapport M/L moyen, donc. Disons qu'une médiane de 200 semble raisonnable.

Amas de galaxies. La distribution de la matière dans les amas de galaxies est un problème particulièrement important pour la cosmologie. Historiquement, c'est par l'analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma que Zwicky, en 1936, mit en évidence une contradiction entre la distribution de lumière et la masse totale mesurée par le thèorème du viriel. C'est ce travail qui a donné naissance au problème de la *masse manquante* (qui d'ailleurs ne manque pas... en fait c'est plutôt qu'il y en a trop !), ou de la *masse cachée*, ou de la *masse invisible*. Pour rester orthodoxe, nous garderons le concept de *matière noire* comme nom générique. Comme on le verra par la suite, cette quantité de matière noire et si importante qu'elle excède l'abondance de baryons prédite par la nucléosynthèse primordiale. Il est donc indispensable de mesurer avec précision et par des estimateurs indépendants la masse des amas de galaxies.
Il y a 3 grandes méthodes pour accéder à la masse des amas de galaxies :

1. l'analyse *dynamique* qui utilise les galaxies de l'amas comme des particules d'un gaz. Elle est basée essentiellement sur le théorème du viriel ;
2. l'analyse du *rayonnement X* du gaz, basée sur l'équilibre hydrostatique du gaz intergalactique intra-amas ;
3. les effets de *lentille gravitationnelle*, basés sur les arcs ou sur l'analyse statististique des distorsions gravitationnelles faibles.

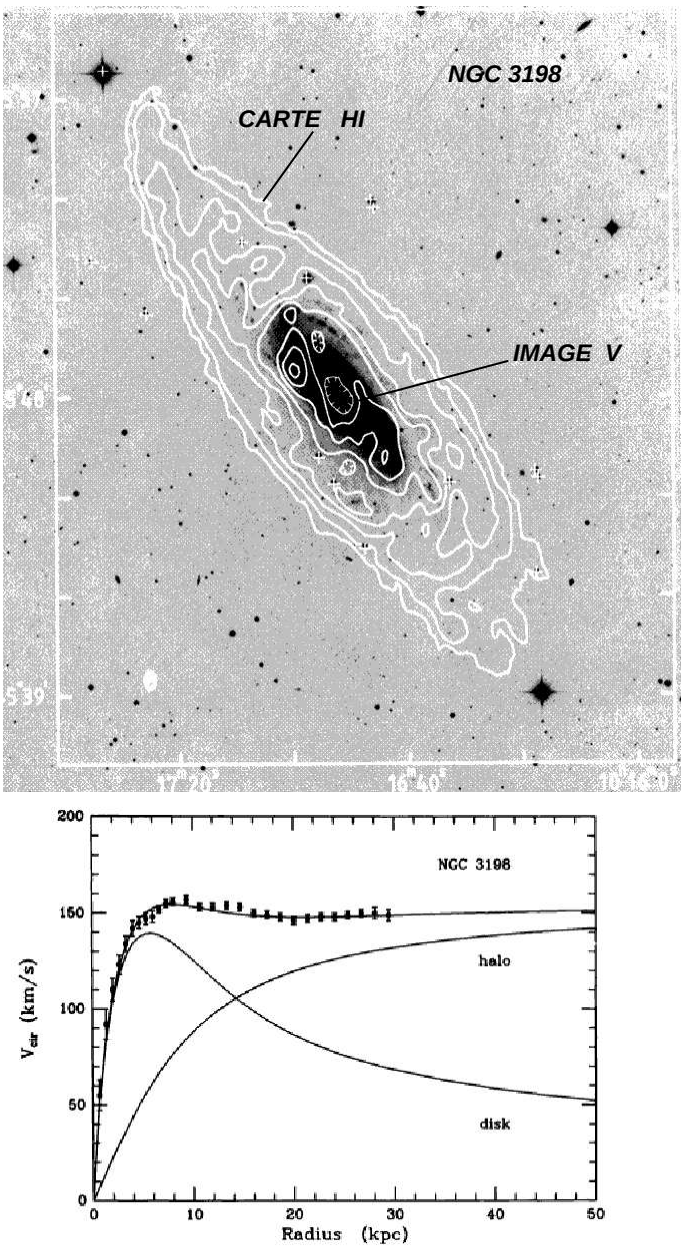

Figure 49.: *Analyse dynamique d'une galaxie spirale typique. L'image du haut est une photographie visible de la galaxie sur laquelle les contours d'émission HI ont été superposés. La raie radio 21cm et la raie optique H_α peuvent être utilisées pour calculer la vitesse de rotation en fonction de la distance au centre. Elle est montrée en bas (carrés noirs). Les lignes représentent un modèle halo+disque qui ajuste les valeurs observées. On voit qu'à grande distance la courbe de rotation reste plate. Seul un halo de matière semble pouvoir en rendre compte.*

1. Masse dynamique

Supposons que les galaxies d'un amas donné soient des particules d'un gaz confiné dans un puits de potentiel gravitationnel. Supposons ensuite, qu'en première approximation cet amas ait atteint un état stationnaire. Dans ce cas, il est en équilibre du viriel et donc l'énergie cinétique totale des particules, E_c, est reliée simplement à l'énergie potentielle du système gravitant, E_g (voir Annexe B) :

$$2E_c + E_g = 0 \ , \tag{287}$$

et donc, si le gaz de galaxies a une dispersion de vitesse σ :

$$\sigma^2 = \frac{GM_{dyn}}{R} \ , \tag{288}$$

où M_{dyn} est la masse de l'amas, appelée *masse virielle*, et R le rayon caractéristique de l'amas, appelé *rayon de viriel*.
D'un point de vue observationnel, la difficulté consiste à estimer la dispersion de vitesse et de rayon de viriel. En effet, on ne mesure que la vitesse radiale des particules et le rayon de l'amas est une quantité très mal définie. Dans le cas simple d'un modèle sphérique, il est cependant possible de mesurer la masse virielle à partir de ces observations.
Soit

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{289}$$

l'énergie cinétique totale des N galaxies de l'amas dont les masses et les vitesses individuelles dans le repère de l'amas sont respectivement m_i et v_i, et soit

$$E_g = - \sum_{paires} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{290}$$

l'énergie potentielle, calculée à partir des distances entre les galaxies. La vitesse radiale de chaque galaxie est

$$v_{ri} = v_i \cos\theta_i \ , \tag{291}$$

où θ_i est l'angle entre la direction de la ligne de visée de la galaxie i est la direction de son vecteur vitesse par rapport au centre de masse de l'amas, et

$$R_{ij} = r_{ij} \sin\phi_{ij} \ , \tag{292}$$

la distance entre les galaxies i et j projetée sur le plan du ciel.
Dans le cas d'un amas sphérique la moyenne des angles peut être calculée,

en admettant que les vitesses v_i et les masses m_i ne sont pas corrélées aux orientations des galaxies. On a alors

$$\langle \cos\theta_i \rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi} = \frac{1}{3} \, , \tag{293}$$

et

$$\left\langle \frac{1}{\sin\phi_{ij}} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi_{ij}^{-1} \, \sin\phi_{ij} \mathrm{d}\phi_{ij} \, \mathrm{d}\psi_{ij}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi_{ij} \, \mathrm{d}\phi_{ij} \, \mathrm{d}\psi_{ij}} = \frac{\pi}{2} \, , \tag{294}$$

À ce stade, on peut calculer la masse à condition de se donner une prescription permettant d'associer les N particules-galaxies aux masse m_i. Si par exemple on suppose que toutes les galaxies ont la même masse individuelle m alors, $M_{dyn} = N \times m$, et on a donc :

$$\frac{1}{3}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{3} M \frac{\sum_i v_i^2}{N} = \frac{1}{3} M \sigma^2 \, , \tag{295}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{paires} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} &= \frac{M}{N}\frac{M}{N} \sum_{paires} \frac{1}{R_{ij}} \left\langle \frac{1}{\sin\phi_{ij}} \right\rangle^{-1} \\ &= M^2 \left[\frac{1}{N^2} \sum_{paires} \frac{1}{R_{ij}} \right] . \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} M^2 \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle . \end{aligned} \tag{296}$$

Avec ces approximations, on peut déterminer simplement la masse d'un système gravitant en mesurant les vitesses radiales individuelles par spectroscopie et le rayon du viriel par imagerie des positions individuelles des galaxies :

$$M_{dyn} = \frac{3\sigma^2}{G} \frac{\pi}{2} \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle^{-1} \, , \tag{297}$$

où σ est la dispersion de vitesse radiale. La quantité $\pi/2 \, \langle 1/R_{ij} \rangle^{-1}$ est appelé rayon de viriel tridimensionnel.
L'expression (297) donne un mode opératoire pour déterminer une masse sur la base de données observationnelles. Cet exemple illustre le fait que la manipulation des observables, qui sont des quantités projetées sur le ciel, n'est jamais immédiate. On doit faire appel à un certains nombres d'hypothèses dynamiques et géométriques concernant le système qui sont fréquemment mal fondées, voire contestables.

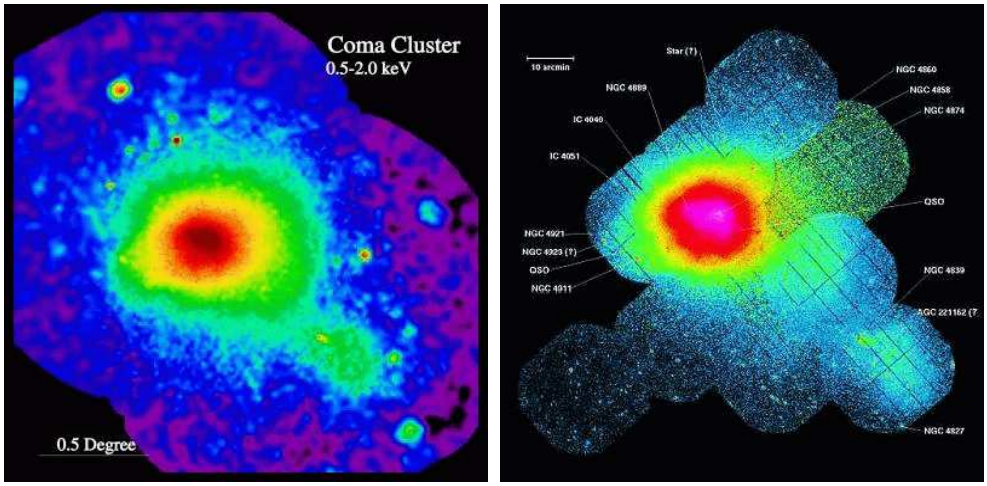

Figure 50.: *Cartes comparatives de l'émissivité X de l'amas de galaxies Coma vue par ROSAT (à gauche) et par le nouveau satellite XMM (à droite). Les progrès dans le domaine de l'observation X ont été très importants et permettent désormais d'observer les amas de galaxies lointains et/ou de cartographier en détail la distribution des baryons chauds des amas proches pour mieux comprendre leur état thermodynamique.*

On peut calculer rapidement les ordres de grandeur à partir de l'expression (297). La dispersion de vitesse des galaxies telle qu'elle est mesurée à partir de catalogue de vitesse radiale est de l'ordre de 1000 km.sec^{-1}. Le rayon caractéristique est de l'ordre de 1 Mpc. Donc

$$M_{dyn} = \frac{3 \times 3.08 \times 10^{24}\ (\mathrm{cm}) \times (10^8)^2\ (\mathrm{cm.sec^{-1}})^2}{6.67 \times 10^{-8}\ (\mathrm{cm^2 g^{-1} sec^{-2}})} = 6.9 \times 10^{14}\ h^{-1} \mathrm{M}_\odot \tag{298}$$

2. Masse X

Les satellites équipés de détecteurs à rayons X embarqués ont permis de découvrir que les amas de galaxies contenaient un gaz intergalactique intra-amas où baignent les galaxies (figure 50). Ce gaz chaud et ionisé est détecté par le rayonnement de freinage thermique émis par les ions. Sa température, 10^8 K, est évaluée par les raies d'émission d'éléments lourds fortement ionisés comme le FeXIV (voir figure 51). Dans le cas simple d'un modèle sphérique, et si l'on suppose que le gaz est en équilibre hydrostatique (cette hypothèse se justifie pour ce gaz, car hormis les zones les plus centrales, le temps de refroidissement du gaz est très largement supérieur au temps de propagation d'une onde acoustique dans le milieu),

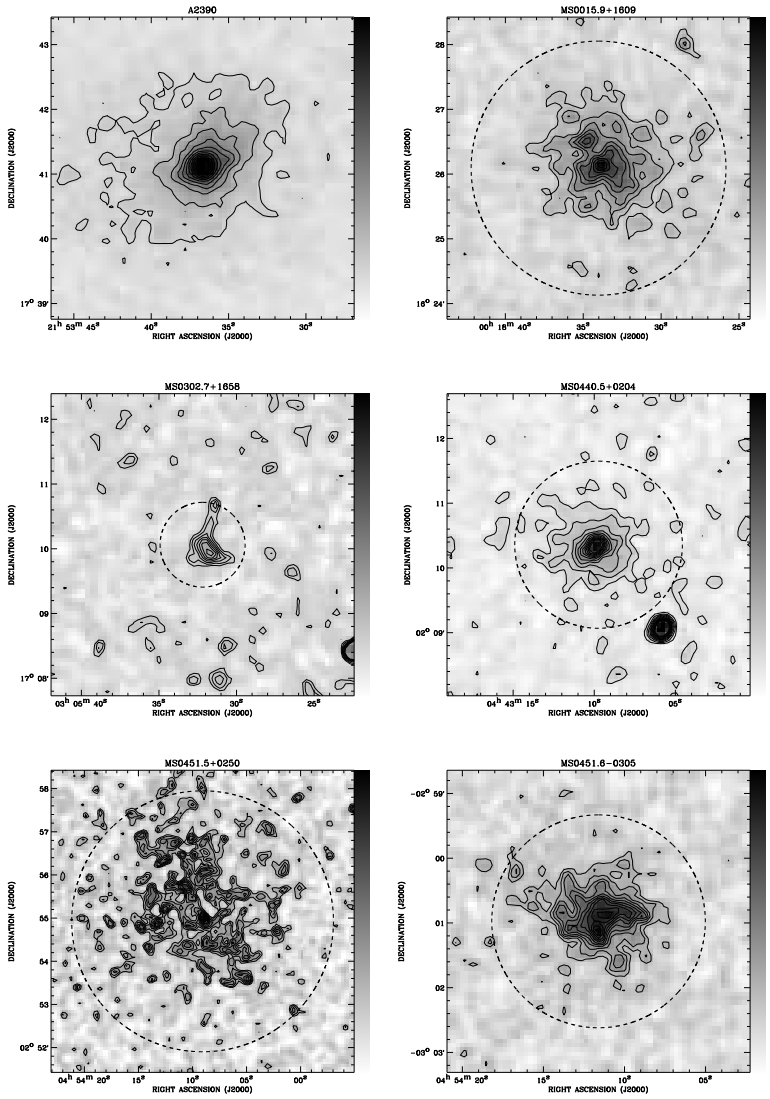

Figure 51.: *Cartes d'émissivité X d'amas de galaxies lointains. Comme on le voit, l'intensité de l'émission et la morphologie de la distribution varient fortement d'un amas a l'autre. Les morphologies les plus régulières sont associées aux amas les plus évolués dynamiquement.*

on peut mesurer la masse totale de l'amas de galaxies, $M_t(r)$, contenue dans une sphère de rayon r.
Si P_X est la pression du gaz émetteur X et ρ_X sa densité, alors

$$\frac{\mathrm{d}P_X}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM_t}{r^2} \tag{299}$$

La pression est donnée par la loi des gaz parfaits

$$P_X = \frac{\rho_X k_B T_X}{\mu m_H} \tag{300}$$

où T_X est la température du gaz chaud, m_H est la masse de l'atome d'Hydrogène, μ la masse moléculaire moyenne du gaz et k_B la constante de Boltzmann. La masse dans le rayon r est donc

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r)\ r^2}{G\mu m_H}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\ln\rho_X\right)}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}\left(\ln T_X\right)}{\mathrm{d}r}\right] . \tag{301}$$

Si l'équilibre hydrostatique est aussi vérifié pour les autres composantes, alors on a de même, pour la matière noire, DM :

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_{DM}(r)\ r^2}{G\mu_{DM} m_{DM}}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\ln\rho_{DM}\right)}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}\left(\ln T_{DM}\right)}{\mathrm{d}r}\right] . \tag{302}$$

Prenons par exemple le cas d'une sphère isotherme. Le terme de gradient de température est donc nul. Par ailleurs, si la dispersion de vitesse de la matière noire est isotrope, on peut exprimer la température de la matière noire en fonction de sa dispersion de vitesse :

$$\sigma^2_{DM} = \frac{k_B T_{DM}}{\mu_{DM} m_{DM}} \tag{303}$$

et donc

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r)\ r^2}{G\mu m_H}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\ln\rho_X\right)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{\sigma^2_{DM} r^2}{G}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\ln\rho_{DM}\right)}{\mathrm{d}r}\right] \tag{304}$$

et donc on a une relation simple entre les deux profils de densité

$$\frac{\mathrm{d}\ln\rho_X}{\mathrm{d}r} = \frac{\mu m_H \sigma^2_{DM}}{k_B T_X}\frac{\mathrm{d}\ln\rho_{DM}}{\mathrm{d}r} , \tag{305}$$

Dans le cas simple d'une sphère isotherme, il est facile de montrer que des distributions de matière comme les profils de King représentent bien

le profil de masse des sphères isothermes tout en conservant l'idée que le potentiel à une échelle caractéristique r_c appelé rayon de coeur (voir Annexe C) :

$$\rho(r) = \rho_o \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-3/2} . \quad (306)$$

Donc les expressions paramétriques ont la forme suivante :

$$\rho_t(r) = \rho_{ot} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-3/2} \quad (307)$$

et

$$\rho_X(r) = \rho_{0X} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-3\beta/2} , \quad (308)$$

où

$$\beta = \frac{\mu m_H \sigma_{DM}^2}{k_B T_X} \quad (309)$$

est simplement le rapport de la température de la matière totale (donc à peu de chose près celle de la matière noire), à celle du gaz intra-amas.
En pratique, on mesure une émissivité X, qui permet de construire un profil de densité de particules $n(R)$ projeté sur le ciel, et donc un profil de densité en masse $\mu m_H n(R)$ projeté. Il est ensuite facile d'ajuster le paramètre β avec le profil de densité projeté, puis de déprojeter le profil pour obtenir $\rho_X(r)$ (voir Annexe C équation 477). Ainsi, sans connaître σ_{DM} on peut tout de même déterminer ρ_{DM} grâce à l'ajustement de β aux données.
Cette approche est intéressante car elle permet de déduire à la fois la quantité de masse totale et la quantité de masse sous forme de gaz ionisé qui est déterminée par le profil radial de l'émissivité X. En y ajoutant le contenu en matière des galaxies, on peut donc mesurer la fraction de masse sous forme baryonique relativement à la matière noire.
On peut exprimer simplement la masse totale $M_t(r)$ déterminée par les cartes X :

$$M_t(r) = 1.13 \times 10^{15} \beta \left(\frac{T_X}{10\mathrm{keV}}\right) \times \left(\frac{r}{\mathrm{Mpc}}\right) \frac{\left(\frac{r}{r_c}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right]} h^{-1} \mathrm{M}_\odot \quad (310)$$

À ce jour une cinquantaine d'amas de galaxies ont fait l'objet de ce type d'investigation. Il ressort que M_X est tout à fait compatible avec M_{dyn}, la dispersion de l'écart étant de l'ordre de 10% .
Plus remarquable encore, la fraction de gaz déduite de ces études atteint

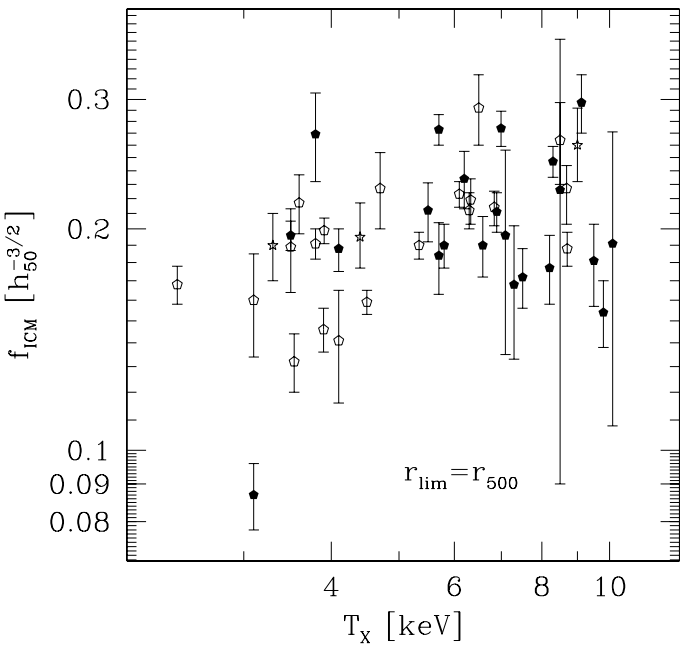

Figure 52.: *Fraction de matière baryonique confinée sous forme de gaz ionisé dans les amas de galaxies calculée pour 45 amas. On voit qu'indépendamment de la température du gaz, cette fraction se situe dans le domaine 10-30% (d'après Mohr et al 1999).*

10 à 30% de la masse totale, ce qui est considérable (voir figure 52). En effet, si l'Univers a pour densité la densité critique et si la fraction de baryons est de l'ordre de 1% (on verra tout cela par la suite), alors si la fraction de masse du gaz est de 20%, tous les baryons dans un rayon

$$R = \left(\frac{20}{100} \frac{3. \times 1. \times 10^{15} \times 2.10^{33}}{0.01 \times 1.9 \times 10^{-29} \times 4\pi} \right)^{1/3} = 20 h^{-1} Mpc \qquad (311)$$

on été englouti dans l'amas.

Les estimateurs présentés dans les paragraphes précédents sont confrontés à trois difficultés :

1. ils sont fondés sur des hypothèses simplificatrices qui définissent la géométrie et l'état dynamique des systèmes gravitants mais dont les justifications physiques sont imprécises, voire critiquables ;
2. les observations semblent démontrer que la matière noire domine l'Univers et que la fraction de matière visible diminue progressi-

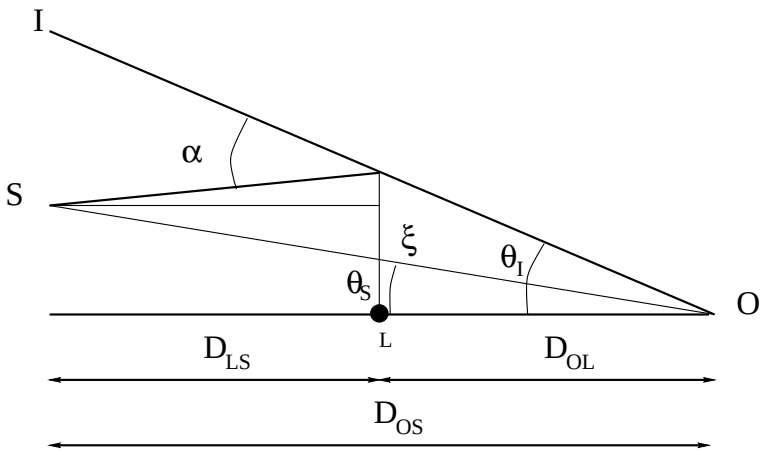

Figure 53.: *Schéma d'une configuration de lentille gravitationnelle. L'angle de déflexion est α. θ_I est la position angulaire de l'image, θ_S est la position angulaire de la source.*

vement lorsque les dimensions des systèmes augmentent. Ce comportement suivant l'échelle est problématique, d'autant plus qu'il est difficile de trouver un outil robuste qui permet d'analyser de façon homogène la totalité des échelles sur lesquelles se distribue la matière. La variation de la fraction de matière visible avec la dimension de la structure pourrait n'être qu'apparente et artificiellement induite par les estimateurs eux-mêmes ;

3. pour la plupart, les méthodes d'analyse dynamique des systèmes utilisent des propriétés révélées par les photons qu'ils émettent. Or, ceux-ci ne montrent que la partie visible, sans que l'on sache établir solidement le rapport entre la matière visible et la matière invisible. Ce lien pourrait dépendre de la position dans l'espace, de la nature des sources lumineuses et certainement du temps (les populations stellaires évoluant avec le temps cosmique).

3. Lentille gravitationnelle

Les lentilles gravitationnelles peuvent résoudre ces difficultés. Dans la situation des *champs faibles* et pour une *lentille mince* (de dimensions négligeables devant les distances SL et LO, voir Figure 53), la relation entre la position réelle de la source et la position de l'image vue par un observateur est donnée par *l'équation des lentilles* :

$$\boldsymbol{\theta}_s D_{os} + \boldsymbol{\alpha} D_{ls} = \boldsymbol{\theta}_i D_{os} \ , \tag{312}$$

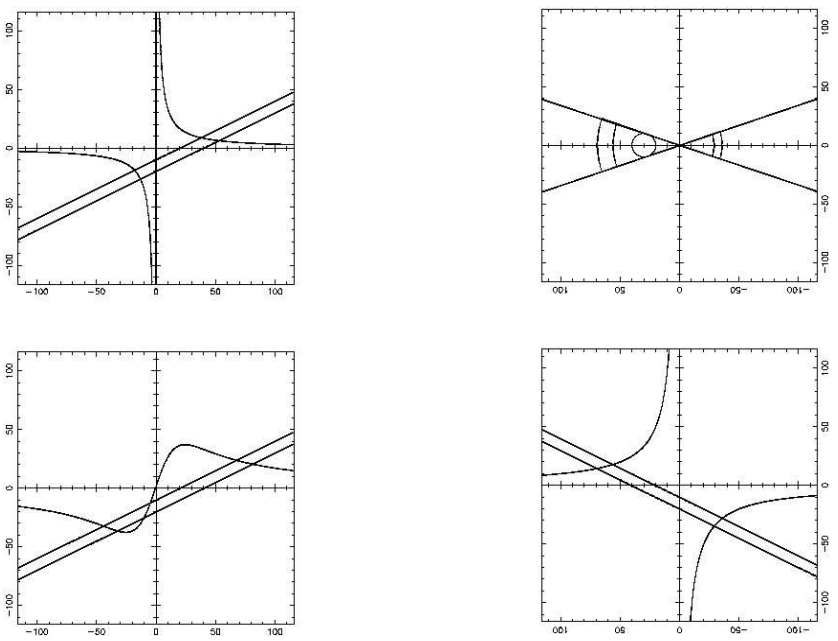

Figure 54.: *Description des images produites par des lentilles gravitationnelles simples. Le cadre en haut à gauche illustre comment une source assimilée à un segment de droite porté sur l'axe des abscisses produit deux images dont les longeurs sont les deux arcs portés par l'hyperbole. Les deux images n'ont pas la longueur du segment de départ. C'est l'effet de grandissement. La figure en haut à droite illustre le grandissement d'une source circulaire. Elle se déduit de la première par simple multiplication des segments qui sont toutes les cordes traversant la source et dont les directions passent par le centre de la lentille. Le cadre en bas à gauche montre les mêmes propriétés pour une lentille non singulière (d'après Mazure et al 1997).*

où $\boldsymbol{\theta_s}$ est le vecteur caractérisant la position sur le ciel de la source et $\boldsymbol{\theta_i}$ celle de l'image. Les composantes de $\boldsymbol{\theta_s}$ et de $\boldsymbol{\theta_i}$ sont donc des angles. Les D_{ij} représentent les distances angulaires.

Pour illustrer quelques propriétés des effets de lentille gravitationnelle, prenons le cas simple d'un déflecteur constitué d'une masse ponctuelle. Comme l'a prédit Einstein, la déflexion des rayons lumineux prend la forme bien connue :

$$\alpha = (4G/c^2)(M/D_{ol}\theta) \tag{313}$$

qui, avec l'équation des lentilles, conduit à une équation du second degré et donc à la formation de deux images. Les images correspondent donc, dans le plan (θ_i, α) aux intersections d'une droite $y = D(\theta_i - \theta_s)$ et d'une

hyperbole $y = K/\theta_i$, et la position de la source est l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Des cas plus réalistes où la masse est nulle à l'origine et où la densité reste finie au centre conduisent plutôt à trois images, voire plus, mais on peut montrer que le nombre total d'images est toujours impair (voir la figure 55). Les images multiples correspondent à des trajectoires différentes des photons provenant d'un même point de la source. Les temps de propagation de la lumière sur ces deux trajectoires sont donc différents et deux photons émis du même point de la source au même moment peuvent par conséquent arriver avec un *décalage temporel* sur l'observateur.

Pour une source étendue dont l'extension radiale est le segment de droite porté par l'axe des abscisses de la figure 54, les positions des images sont données par les intersections des deux droites parallèles limitant le segment. Les deux images sont renversées l'une par rapport à l'autre et leur longueur n'est plus égale à celle de la source. C'est le phénomène d'*amplification*. La projection des segments-images de la figure 54 sur l'axe des abcisses donne leur position sur le plan du ciel. Par raison de symétrie par rapport au centre du déflecteur, la reconstruction complète des images est immédiate.

L'amplification est le rapport des surfaces de l'image et de la source correspondante. Considérons en effet un pinceau de lumière infinitésimal, issu d'une source étendue, et qui traverse le plan de la lentille. Les déviations subies par tous les rayons du faisceau sont égales ce qui entraîne la conservation de l'étendue du faisceau, d'où l'égalité des brillances de surface de la source et de ses images. Le phénomène d'amplification n'est donc pas un accroissement de l'intensité de la brillance de l'objet mais bien une augmentation de sa surface, c'est-à-dire un grandissement Ceci est illustré sur la 54). Notez que sur cette figure on voit que les images des points extrêmes de la source sont inversées sur les deux images. Ce *changement de parité* des images se produit à chaque création d'une nouvelle image.

Supposons que le déflecteur soit une masse ponctuelle de masse M. Dans une configuration unidimensionnelle, les solutions pour les images sont données par :

$$\theta_S = \theta_I + \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}\frac{4GM}{c^2\theta_I} \; . \tag{314}$$

Un cas critique se produit quand $\theta_S = 0$, correspondant à un alignement parfait entre la source, la lentille et l'observateur. Les positions des images sont alors dégénérées et forment un cercle d'amplification infinie de rayon θ_E appelé *rayon d'Einstein* :

$$\theta_E = \left[\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}\right]^{1/2} \; . \tag{315}$$

la dimension du rayon d'Einstein dépend de la configuation de la lentille :

- pour une étoile de 1 $M_\odot$ à la distance D=1 kpc, $\theta_E = 0.001$ seconde d'arc,
- pour une galaxie de 10^{12} $M_\odot$ à la distance D=1 Gpc, $\theta_E = 1$ seconde d'arc,
- et pour un amas de galaxies de 10^{14} $M_\odot$ à $z = 0.3$ et des sources à $z_S = 1$, $\theta_E = 30$ secondes d'arc.

On définit la *matrice d'amplification* par $A = d\boldsymbol{\theta}_S / d\boldsymbol{\theta}_I$, qui est obtenu simplement en différentiant l'équation des lentilles. La matrice contient le terme de convergence, κ, et les composantes du cisaillement,(γ_1, γ_2),

$$\begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\partial_{xx}\varphi & -\partial_{xy}\varphi \\ -\partial_{xy}\varphi & 1-\partial_{yy} \end{pmatrix} , \qquad (316)$$

où les "∂_{ij}" sont les dérivées partielles du potentiel gravitationnel projeté sur la ligne de visée. L'amplitude de l'amplification est

$$\mu = \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{|(1-\kappa^2)-\gamma^2|} . \qquad (317)$$

L' amplitude du cisaillement $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ exprime l'amplification anisotrope. κ exprime la composante isotrope. On constate que $2\kappa = \Delta\varphi = \Sigma/\Sigma_{crit}$, est directement la densité de masse projetée. Lorsque le déterminant s'annule l'amplification devient infinie. D'un point de vue observationnel ces cas limites correspondent à la formation des anneaux et des arcs gravitationnels. Les points de l'image où l'amplification est infinie sont les *lignes critiques*. Dans le plan source elles correspondent aux *lignes caustiques*.
La *densité critique* est

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_{OS}}{D_{LS}D_{OL}} \approx 0.1 \left(\frac{H_0}{50\mathrm{km/sec/Mpc}}\right)\frac{d_{os}}{d_{ls}d_{ol}}\ \mathrm{g.cm^{-2}} \qquad (318)$$

et exprime la force de la lentille à produire des effets gravitationnels. Par exemple pour un amas de galaxies au redshift $z_L = 0.3$ et des sources amplifiées au redshift $z_S = 1$, $d_{os}/(d_{ls}d_{ol}) \approx 3$. Si l'amas est une sphère isotherme de rayon de cœur R_c et avec $M(R_c) = 2 \times 10^{14}$ $M_\odot$, alors

- pour R_c=250 kpc, Σ_{crit}=0.05 g.cm^{-2},
- pour R_c=50 kpc, Σ_{crit}=1. g.cm^{-2} .

Donc, l'existence d'arcs gravitationnels implique que la matière totale est nécessairement fortement concentrée. La découverte d'arcs gravitationnels fut une surprise car les distributions radiales des galaxies et du gaz ionisé ne montrent pas une très forte concentration centrale.

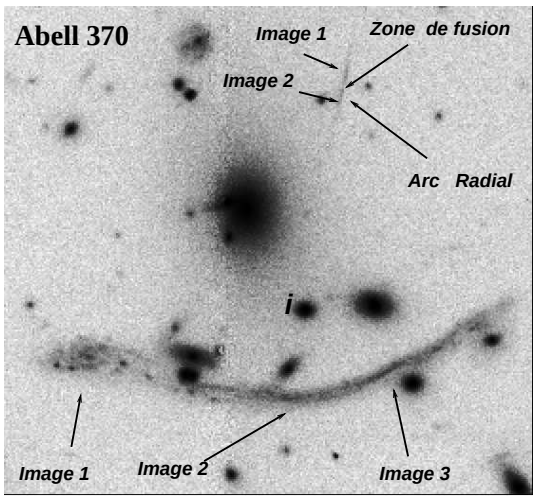

Figure 55.: *Arcs gravitationnels dans l'amas de galaxies Abell 370 ($z = 0.375$). Le long filament est un arc tangentiel, fusion de trois images d'une source à $z = 0.725$. L'image 1, bien qu'amplifiée, n'est pas déformée. On reconnaît la morphologie d'une galaxie spirale. Les deux autres images sont fortement déformées. À partir des propriétés de ces trois images (position, élongation, rayon de courbure), on peut estimer la masse de la lentille dans un rayon définit par le rayon de courbure. En haut à droite on distingue un cas de fusion de deux images radiales. Les autres objets du champs sont des galaxies appartenant à Abell 370.*

Pour une sphère isotherme singulière de dispersion de vitesse tridimensionnelle σ, le potentiel projeté au rayon r, $\varphi(r)$, est

$$\varphi = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r \tag{319}$$

et les images sont décrites par l'équation des lentilles

$$\boldsymbol{\theta}_S = \boldsymbol{\theta}_I - 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{\boldsymbol{\theta}_I}{|\boldsymbol{\theta}_I|} \tag{320}$$

La matrice d'amplification est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 4\pi \dfrac{\sigma^2}{c^2} \dfrac{D_{LS}}{D_{OS}} \dfrac{1}{|\boldsymbol{\theta}_I|} \end{pmatrix} \tag{321}$$

et dans ce cas, il n'y a qu'une ligne critique qui est donnée par le *rayon d'Einstein*

$$\theta_{SIS} = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \approx 16" \left(\frac{\sigma}{1000 \mathrm{km.sec}^{-1}} \right)^2 \tag{322}$$

Pour un univers "Einstein-de Sitter", avec $z_L = 0.3$ et $z_S = 1$, la masse totale contenue dans un rayon θ est alors

$$M(\theta) = 0.57 \times 10^{14}\ h^{-1}\ M_\odot \left(\frac{\theta}{30"}\right) \left(\frac{\sigma}{1000\mathrm{km.sec}^{-1}}\right)^2 \qquad (323)$$

et l'amplification s'écrit

$$\mu(\theta_I) = \frac{\theta_I}{\theta_I - \theta_{SIS}} \qquad (324)$$

Dans le cas par exemple de l'arc observé dans l'amas de galaxies Abell 370 (figure 55), la masse contenue dans le rayon défini par le rayon de courbure de l'arc est donc :

$$M_{A370}(\theta < 30") = 1. \times 10^{14}\ h^{-1}\mathrm{M}_\odot \qquad (325)$$

Si l'on dispose de suffisamment de sources d'arrière-plan on s'attend à voir une image cohérente produite par la totalité de ces sources qui tracent le champ de gravitation (à l'instar de la limaille de fer traçant des lignes de champ magnétique sur une feuille de papier). La reconstruction des champs de gravitation par cette approche est possible, sous certaines hypothèses :

- l'orientation des sources est isotrope,
- l'orientation des sources n'est pas corrélée à leur ellipticité,
- la distribution en distance des sources est connue.

On peut ainsi reconstruire la densité de matière, sachant que la relation entre cisaillement et densité de matière est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \dfrac{1}{2}\left(\partial_{xx} - \partial_{yy}\right)\varphi + i\partial_{xy}\varphi \\ \kappa = \dfrac{1}{2}\left(\partial_{xx} + \partial_{yy}\right)\varphi \\ \varphi = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int \kappa\left(\boldsymbol{\theta}'\right)\ln\left(|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|\right) d\boldsymbol{\theta}' \ , \end{cases} \qquad (326)$$

et donc

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi}\int \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')\ \kappa(\boldsymbol{\theta}')d^2\theta' \ , \qquad (327)$$

où

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') = \frac{(\theta_2 - \theta_2')^2 - (\theta_1 - \theta_1')^2 - 2i(\theta_1 - \theta_1')(\theta_2 - \theta_2')}{|(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')|^4} \ . \qquad (328)$$

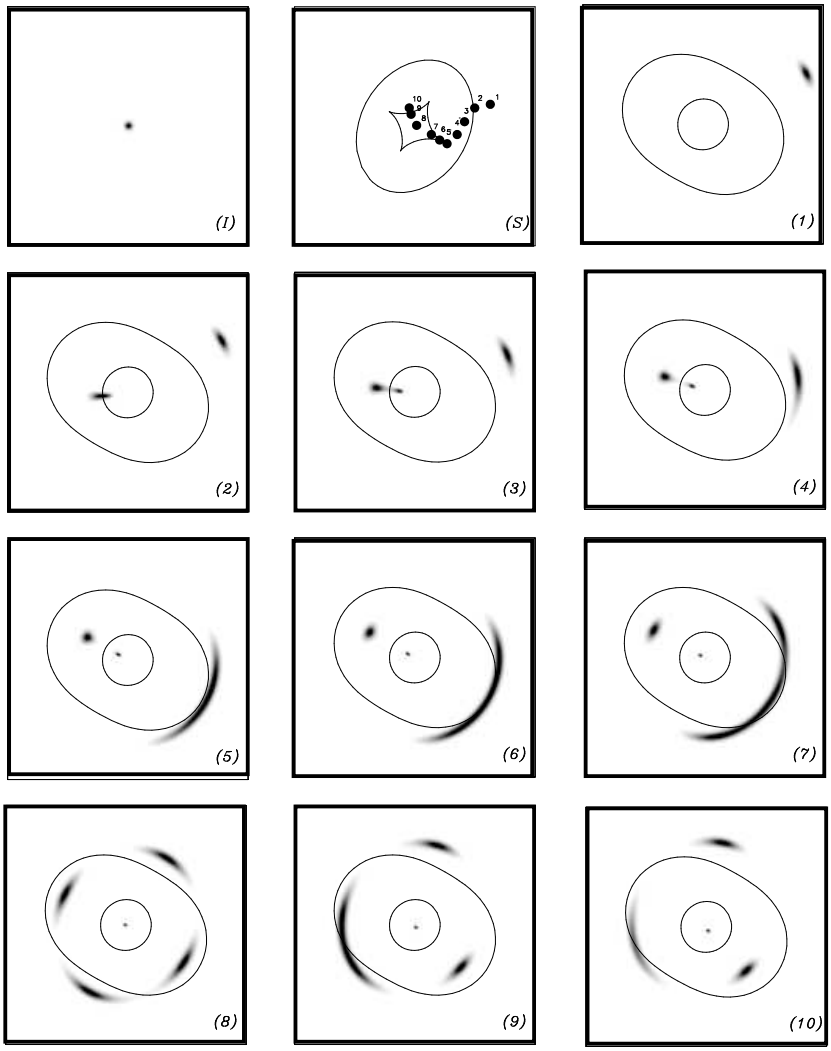

Figure 56.: *Effet de lentille gravitationnelle fort produit par un potentiel elliptique en fonction de la position de la source. L'image en haut à gauche montre la forme de la source. L'image suivante montre les positions de la source dans son plan source. Les lignes sont les lignes caustiques interne et externe. Pour chaque position, les images suivantes montrent les effets de la lentille. Selon la position de la source, de une à cinq images sont produites. Les positions des lignes critiques sont montrées pour chaque configuration (d'après Kneib 1993, thèse Université Toulouse III).*

Cette équation peut être inversée, ce qui donne une relation entre κ, c'est-à-dire la densité de matière, et γ, c'est-à-dire l'ellipticité des galaxies produite par le cisaillement gravitationnel :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \Re[\mathcal{D}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}')] \; d^2\theta' \; + \kappa_0 \; , \tag{329}$$

où $\Re$ désigne la partie réelle. Si les galaxies sont distribuées aléatoirement en orientation, alors $< |\boldsymbol{\epsilon}^S| >_\theta = 0$ et par conséquent

$$< |\boldsymbol{\epsilon}^I| >= |\mathbf{g}| = \frac{|\boldsymbol{\gamma}|}{1 - \kappa} \; . \tag{330}$$

Ce qui démontre bien qu'à partir des ellipticités et des orientations des galaxies on peut reconstruire une carte de densité de la matière. Par exemple, dans le cas de l'amas MS1008-1224 ($z_l = 0.31$) où la distance des sources est bien connue, la carte de cisaillement est bien visible et donne l'allure du profil de matière totale :

$$M_{WL}(< \theta) = 6.14 \times 10^{14} h^{-1} \mathrm{M}_\odot \; \bar{\kappa}(< \theta) \; \theta^2 \tag{331}$$

où θ est la distance radiale angulaire exprimée en minute de degré et $\bar{\kappa}$ est la valeur moyenne de κ dans le cercle de rayon θ.

Les mouvements à grande échelle des galaxies. L'organisation à grande échelle des champs de vitesse est aujourd'hui démontrée. On observe effectivement que les mouvements propres des galaxies ne sont pas aléatoires mais qu'ils constituent d'immenses mouvements cohérents sur des échelles de l'ordre de 100 Mpc. Ces champs de vitesse sont interprétés comme les mouvements induits par des champs de gravitation de structures très massives, comme des superamas de galaxies.
Il est possible de cartographier ces mouvements et de les combiner avec les cartes de densité numérique et/ou de densité de lumière des galaxies pour reconstruire le champ de matière responsable de ces flots. Cette chance résulte du fait que dans un univers en expansion dont les perturbations sont d'origine gravitationnelle, les champs de vitesses induits sont dominés par des composantes radiales dirigées vers le potentiel gravitationnel qui domine l'environnement. L'amplitude de la composante perpendiculaire au gradient du potentiel de la vitesse décroît inversement au facteur d'échelle R. On montre alors que le champ de vitesse est directement relié au contraste de densité de matière, $\delta(\vec{x})$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{H_0 f(\Omega)}{4\pi} \int \frac{\delta(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \; . \tag{332}$$

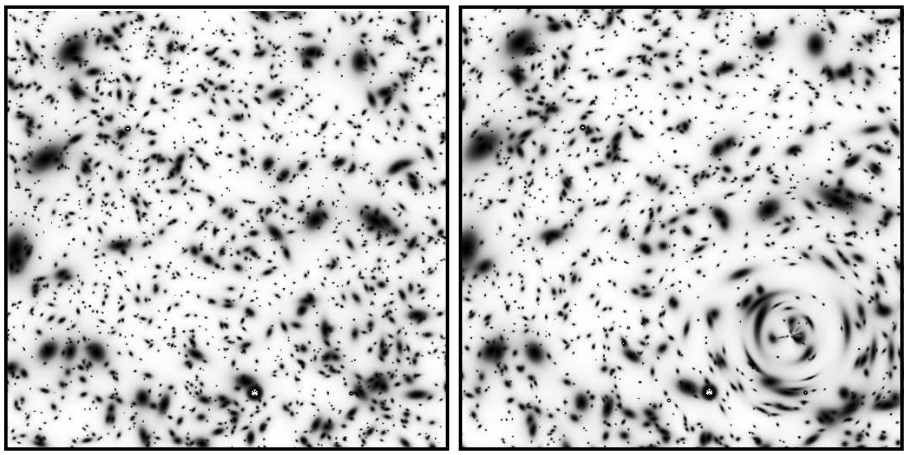

Figure 57.: *Champ de distorsion gravitationnelle induit par une lentille. La figure de gauche montre une distribution aléatoire de galaxies avec une densité correspondant à celle observée sur les images les plus profondes obtenues sur les grands télescopes. La figure de droite montre la même population telle qu'elle apparaît sous l'effet de la lentille. Le déflecteur est une sphère isotherme de dispersion de vitesse* 1300 kms^{-1} *à un redshift de* $z = 0.15$. *Les sources sont à un redshift moyen de* $z = 1.3$. *Le champ de distorsion est une structure cohérente qui trace la forme du potentiel gravitationnel (d'après Mellier 1999, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 37, 127).*

où la fonction f est une expression déterminée empiriquement

$$f \approx \Omega_m^{0.6} + \frac{\Omega_\lambda}{70}\left(1 + \frac{\Omega_m}{2}\right) \ . \tag{333}$$

Ces deux expressions montrent que l'on peut utiliser les champs de vitesse pour mesurer la masse des grandes structures responsables de mouvements à grande échelle des galaxies, ou bien, si l'on parvient à déterminer le champ de densité δ de manière indépendante, pour mesurer Ω.
La principale difficulté est la mesure des vitesses radiales individuelles des galaxies, v_i, qui sont combinées avec la vitesse d'expansion

$$v_i = v_{tot} - H_0 D \ , \tag{334}$$

où v_{tot} est la vitesse radiale totale et D la distance de la galaxie considérée. Il est donc crucial de disposer d'indicateurs de distances précis et sans erreurs systématiques.
Cette approche a été initialement utilisée pour analyser la distorsion du champ de vitesse local de l'expansion par la présence du champ de gravité du Superamas Local et de l'amas de galaxies Virgo. Mais c'est sur

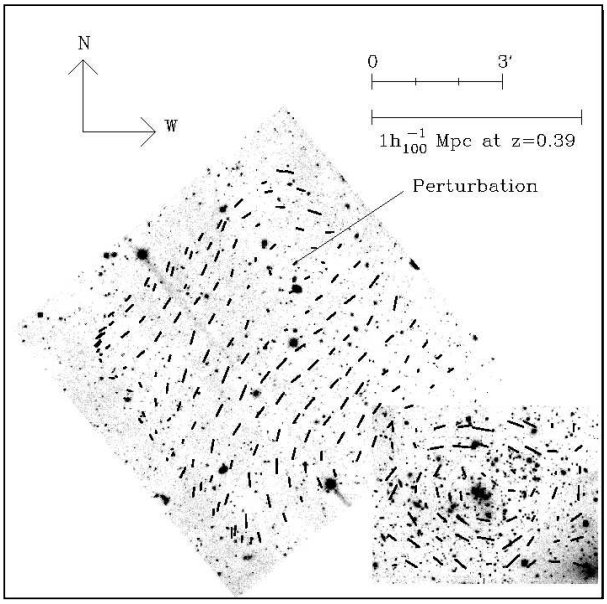

Figure 58.: *Carte de distorsion gravitationnelle observée autour de l'amas de galaxies Cl0024+1654 ($z_L = 0.38$). Les traits indiquent l'orientation et l'amplitude du cisaillement gravitationnelle. La cohérence du champ de cisaillement révèle la morphologie de la distribution de la matière noire. La perturbation indiquée a été détectée par le cisaillement alors qu'aucune contrepartie optique n'est visible. Cela montre que potentiellement les distorsions gravitationnelles peuvent sonder la matière invisible indépendamment de la distribution de la lumière (d'après Bonnet, Mellier & Fort 1994, ApJ 427, L83).*

des catalogues des champs de vitesse (appelés catalogues "4-D" car ils fournissent les positions projetées sur le ciel, la distance et la vitesse individuelle de chaque galaxie) que les résultats les plus intéressants ont été publiés. On a pu ainsi reconstruire les champs de vitesse de notre voisinage et mettre en évidence les structures responsables de ces accrétions. Les figures 59 et 60 montrent la reconstruction des champs de vitesse et de matière autour de notre Groupe Local sur des échelles de 80 h^{-1} Mpc. Les grandes structures dominantes sont le Grand Attracteur et Le superamas Perseus-Pisces qui doivent atteindre des masses dépassant 10^{15} $M_\odot$.

Les mesures de Ω déduites de ces analyses donnent $\Omega > 0.3$. Cependant elles sont sensibles au *facteur de biais* qui relie les contrastes de densité numérique de galaxies au contraste de masse et qui intervient dans l'inversion de l'equation (332).

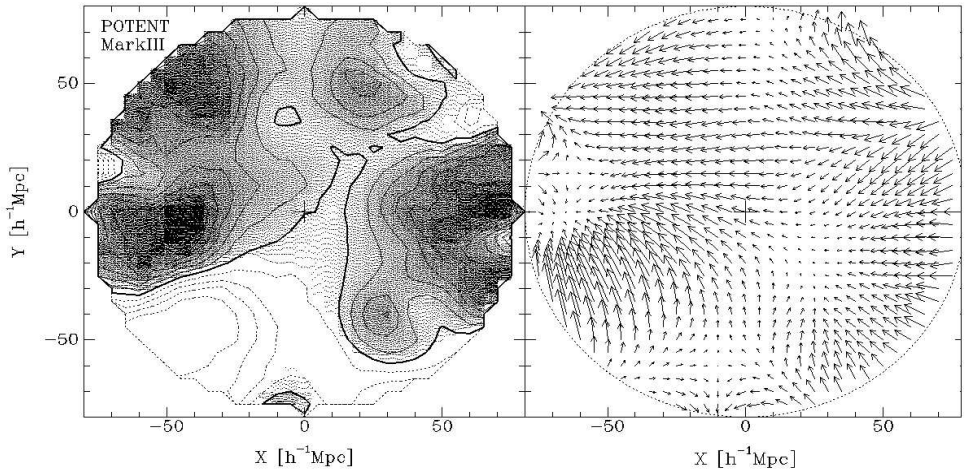

Figure 59.: *Cartographies du champ de densité de matière et du champ de vitesse des galaxies à partir du catalogue de galaxies Mark III (3300 galaxies). À gauche, le champ de densité. Les contours en tirets sont les zones à contraste de densité négatif. À droite, le champ de vitesse des galaxies projeté dans le plan Supergalactique (Dekel et al 1999, ApJ 522, 1).*

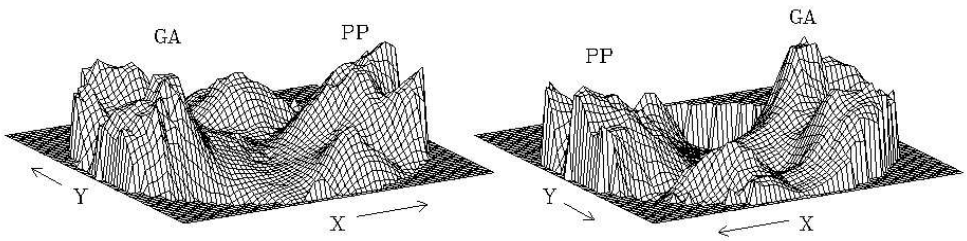

Figure 60.: *Reconstruction du champ de densité selon deux points de vue dans le plan Supergalactique. La dimension du champ atteint 80 h^{-1} Mpc. Les deux structures dominantes sont le Grand Attracteur (GA) et le superamas Perseus-Pisces (PP).*

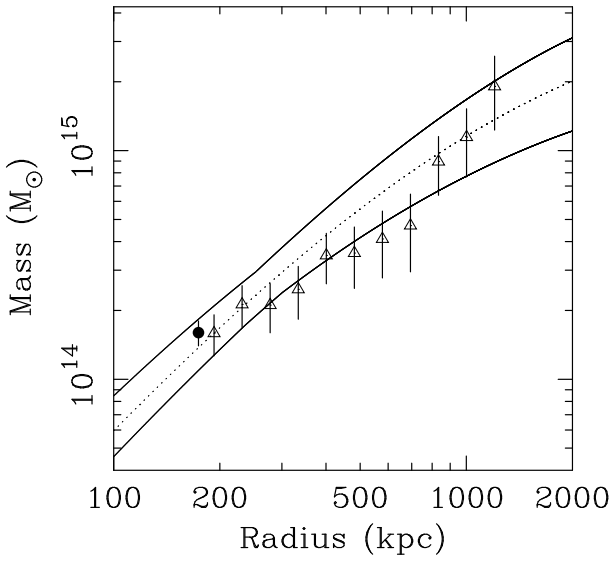

Figure 61.: *Analyse comparée X et distorsion gravitationnelle de l'amas de galaxies Abell 2390. Les courbes continues définissent le profil radial de masse déduit de l'analyse des données X du satellite Chandra (d'après Allen et al 2001, MNRAS 324, 877). Les triangles représentent le profil de matière déduit de la cartographie des distorsions gravitationnelles (d'après Squires et al 1996, ApJ 461, 572). Le cercle noir est la masse calculée au rayon critique indiqué par l'arc détecté dans A2390 (d'après Pierre et al 1996, A&A 311, 413). La correspondance des mesures est très satisfaisante.*

En résumé. Le tableau 2 et la figure 62 résument les méthodes et les valeurs de M/L et de Ω déduites de ces analyses. La figure 61 est par ailleurs très intéressante car elle montre la concordance des mesures obtenues avec les trois estimateurs "X", "weak lensing" et "strong lensing". Ce sont des comparaisons indispensables pour valider chaque méthode.

9.3 Mesure du couple Ω_m, Ω_Λ

Les dernières années ont été particulièrement enthousiasmantes en ce qui concerne la mesure des paramètres Ω_m et Ω_Λ. Les observations des supernovae ont amorcé ce bouleversement en mettant en évidence l'accélération de l'Univers. Elle conduit inévitablement à conclure que la constante cosmologique doit être non-nulle. Les spectaculaires résultats de BOOMERANG et MAXIMA montrent que notre Univers doit être plat, ce qui implique l'existence d'une constante cosmologique. Enfin, les premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique apportent des toutes nouvelles contraintes sur Ω_m et la normalisation du spectre de puissance des fluctuations, σ_8 et semblent montrer

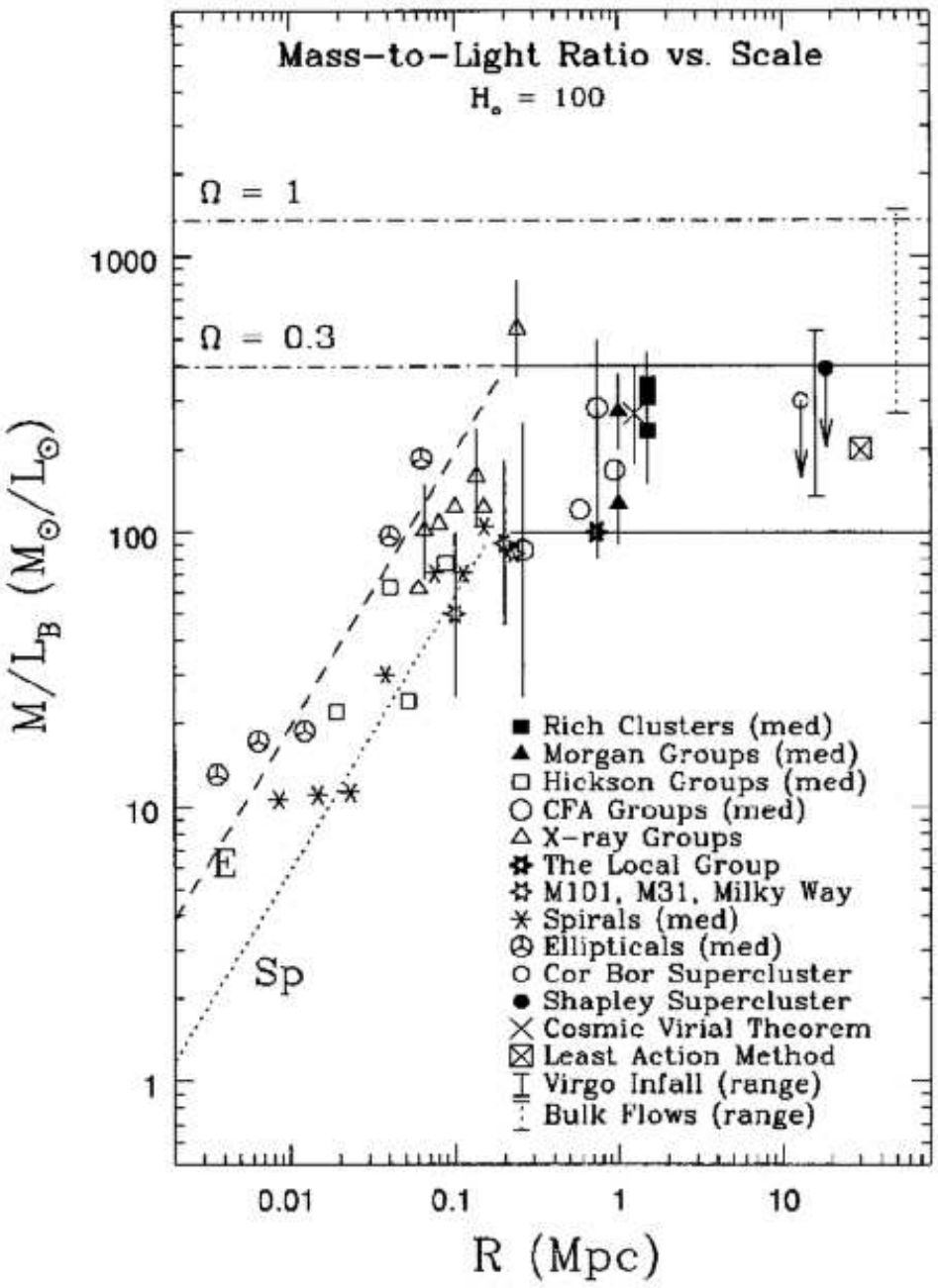

Figure 62.: *Évolution du rapport M/L en fonction de l'échelle de la structure. Les symboles E et Sp se rapportent aux galaxies elliptiques et spirales. Les champs de vitesse à grande échelle se rapportent aux données Virgo Infall et Bulk Flows. La montée progressive du M/L est claire. Cependant, il n'y a pas de preuves que Ω tende vers 1, sauf peut être marginalement pour les champs de vitesse.*

Composante/méthode	M/L	échelle	Ω
Voisinage solaire	5	1 kpc	0.003 h^{-1}
Cœur des galaxies elliptiques	10	2 kpc	0.007 h^{-1}
Masse virielle des elliptiques	30	10 kpc	0.02 h^{-1}
Rotation des spirales	30	10 kpc	0.02 h^{-1}
Groupes de galaxies	200	500 kpc	0.13 h^{-1}
Amas de galaxies	300	1Mpc	0.20 h^{-1}
Baryons (nucléosynthèse)	-		0.01-0.05 h^{-2}
Gaz intergalactique HI	-		0.0004-0.010 h^{-1}
Composante stellaire	-		0.003 h^{-1}
Fond diffus cosmologique	-	-	0.000023 h^{-2}
Chute sur Virgo	-	15 Mpc	0.1-0.4
Champs de vitesse	-	20 Mpc	> 0.5

Table 2.: *Estimation du paramètre de densité de certaines composantes dominantes de l'univers et dans l'univers actuel (ces fractions dépendent de l'histoire de la formation des galaxies). La ligne intermédiaire donne la contribution à la densité d'énergie du fond diffus cosmologique.*

que ce champ des fluctuations initiales était gaussien.
Compte tenu des équations décrites en Section 9, on s'attend donc à des prédictions différentes des modèles standards (sans constante cosmologique) sur tous les observables : magnitudes apparentes, comptages de galaxies, évolution de la fraction d'amas de galaxies, champs de vitesse à grande échelle, fluctuations des anisotropies du fond diffus cosmologiques. La figure 46 illustre la multitude de modèles qu'engendre l'introduction d'une constante cosmologique. Par la suite, je décris comment certaines observables peuvent effectivement apporter des contraintes sur ces deux paramètres.

Les supernovae de type Ia. Les supernovae de type Ia sont des naines blanches qui explosent sous l'effet de l'interaction avec un compagnon proche avec lequel elle forme un système double. Le spectre des SNIa est complexe et évolue dans le temps (voir figure 63). Il diffère des autres supernovae par la présence de raie de SiII. Les courbes de lumière des SNIa ont des propriétés remarquables et très homogènes. Leur luminosité absolue à la période du maximum d'éclat et le profil de décroissance après le maximum sont les mêmes pour toutes ces supernovae et atteint les valeurs caractériques $M_B = -19.6 \pm 0.1$ ou $M_I = -19.3 \pm 0.1$. Il en résulte en particulier que le module de distance des SNIa au maximum est une fonction qui ne dépend que du couple $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ si l'on connaît

leur redshift :

$$m - M = \text{Cte} + \log\left[d_A(z, \Omega_m, \Omega_\Lambda)\right] \tag{335}$$

Le diagramme de Hubble d'un échantillon de supernovae réparties dans un grand intervalle de redshift peut donc en principe être construit et comparé aux prédictions de différents modèles (figure 64).
Les mesures actuelles établies sur la base de deux grands programmes indépendants de détection et de suivi de supernovae lointaines donnent des résultats concordants. Sur environ 2 échantillons de 40 supernovae, il ressort que $\Omega_\Lambda > 0.7$. Plus précisément :

- le modèle ($\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$) est exclu,
- $\Omega_\Lambda > 0$ (3 σ),
- $q_0 < 0$ et l'univers est donc en accélération
- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, alors $\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ et $q_0 \approx -0.55$.

Une étude approfondie des sources de biais systématiques est en cours à l'heure actuelle. En particulier pour vérifier si les SNIa ont les mêmes propriétés pour tous redshifts (figure 63), si les effets d'extinction internes affectent les luminosités mesurées, si les effets de lentille gravitationnelle ne biaisent pas l'échantillon ou si les SNIa ont des propriétés qui dépendent de la morphologie de la galaxie hôte. Pour le moment aucun de ces effets ne semble pouvoir remettre en cause les résultats.

La fraction des quasars amplifiés. L'équation (238) décrit comment le facteur d'expansion évolue. Il est assez facile de décrire l'effet de Ω_Λ qui peut s'opposer à Ω_m. À grand redshift, le terme de matière domine l'expansion car il varie en z^3 alors que le terme Ω_Λ varie comme z^2. Comme $\Omega_m \to 1$ quand z croît, l'évolution temporelle du facteur d'échelle $R(t)$ est similaire à celle d'un modèle $\Omega_m \approx 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. L'univers semble avoir une expansion qui ralentit comme un univers fermé. Mais progressivement z augmente, le terme Ω_Λ devient de plus en plus important et contribue majoritairement à l'expansion jusqu'à inverser sa courbure. Dans le cas d'un univers plat, pour $z \approx 0.2$ le terme Ω_Λ peut contrebalancer Ω_m et il existe donc une phase où l'univers a une expansion très lente.
Imaginons par exemple que la valeur de Ω_Λ soit assez élevée pour contrebalancer Ω_m et inverser très significativement le sens de l'accélération de l'expansion. Il existe une période dans l'histoire de l'univers où les structures et les galaxies se forment dans un volume d'univers quasi-constant. L'univers accumule donc un grand nombre de galaxies, qui sont autant de lentilles gravitationnelles potentielles, dans un intervalle de redshift très réduit. Toutes ces galaxies vont donc produire des effets de lentille gravitationnelle sur les quasars d'arrière-plan. On s'attend donc à une

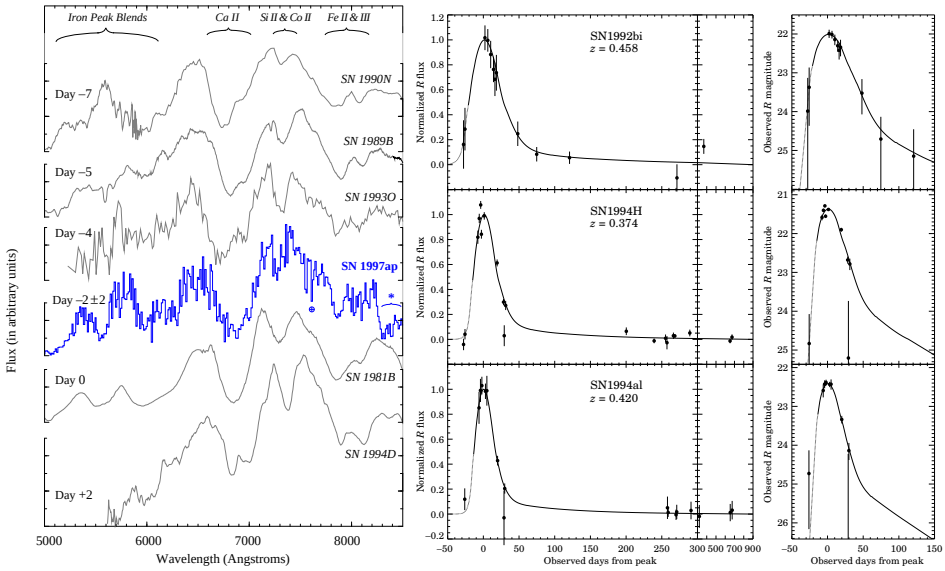

Figure 63.: *A gauche, spectres de SNIa à différent redshift. A droite, courbes de lumière montrant les magnitudes apparentes. Elles diffèrent puisque ces supernovae sont à des redshifts différents.*

forte dépendance du nombre de quasars amplifiés en fonction de l'amplitude de la constante cosmologique.
L'analyse statistique du nombre de quasars amplifiés montre que la fréquence observée du phénomène est comptatible avec $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. Pour le moment les limites les plus solides donnent $\Omega_\Lambda < 0.66$, mais, pour rester prudent, la contrainte est plutôt $\Omega_\Lambda < 0.9$ (Malhotra et al 1997). Il est en fait assez compliqué de produire une contrainte car les échantillons de quasars sont peu nombreux et les biais possibles mal contrôlés. Les progrès à venir sont sans doute les catalogues 2dF, du SDSS (on attend 100000 quasars) puis le grand relevé profond du VLT VIRMOS car ils produiront de très gros échantillons homogènes de quasars.

Les arcs gravitationnels. Les arcs gravitationnels, comme la fraction de quasars multiples à grande séparation angulaire, ou bien la position de lignes critiques dans les amas de galaxies, permettent de mesurer Ω_Λ grâce à un effet de convergence du banc d'optique dont l'amplitude dépend de Ω_m et Ω_Λ. Pour l'illustrer, considérons le cas d'une sphère isotherme singulière. Nous avons vu (Eq. 322) que la position de la ligne critique varie $\theta \propto \sigma^2 D_{LS}/D_{OS}$. Si par chance nous observions deux arcs gravitationnels provenant de deux sources à des redshifts différents, alors

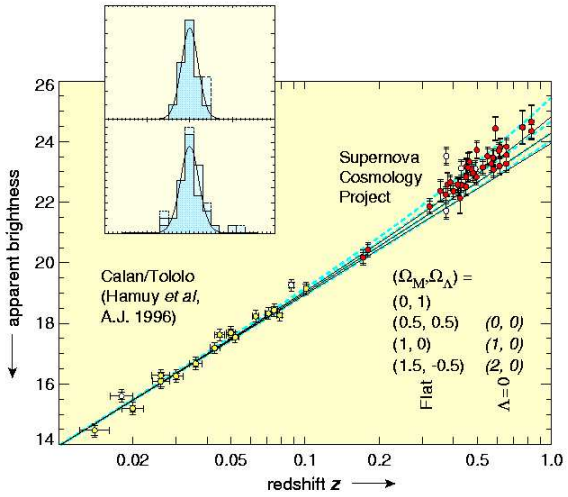

Figure 64.: *Diagramme de Hubble construit à partir d'un échantillon de SNIa répartis en redshift. Les courbes en pointillées montrent des modèles d'univers. On peut mesurer la difficulté technique du problème à la vue de la dispersion des mesures relativement à l'écart entre chaque modèle.*

le rapport des lignes critiques des sources 1 et 2, R_l est

$$R_l = \frac{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_1}{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_2} , \tag{336}$$

qui est une fonction ne dépendant que de Ω_m et Ω_Λ si les redshifts des deux arcs sont connus.
Malheureusement aucun cas idéal comme celui-ci n'a été rencontré. Il est même assez vraisemblable qu'il n'existe pas car les amas de galaxies ne sont pas vraiment des sphères isothermes. Cependant, on peut généraliser cette méthode à des configurations plus complexes, comme par exemple lorsqu'un arc a un redshift connu et que la ligne critique des sources lointaines est aussi connue. Les résultats sont très incertains. Sur l'amas Cl0024+1654 elle donne $\Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$ si $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$. Mais la méthode dépend fortement de la distribution en redshift des sources et du modèle de la lentille. Une alternative est de considérer des triplets d'arclets situés approximativement à la même position projetée dans le plan de la lentille. Ces triplets voient alors le même champ déflecteur ce qui permet de briser la dégénéréscence induite par la distribution en densité du potentiel.

Les effets de distorsion gravitationnelle cosmologique L'amplitude des effets de lentille gravitationnelle produits par les grandes structures de

l'Univers est infime car les contrastes de densité sont de l'ordre de 10^{-2}. Cependant, ils s'accumulent progressivement pendant tout le trajet des photons. La matière noire peut ainsi déformer les galaxies lointaines et le champ cohérent de déformation induit peut être observé et analysé sur les grands relevés photométriques du ciel.
L'angle de déflexion induit par les interactions cumulées sur une ligne de visée est

$$\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\theta},w\right)=\frac{\delta\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{\theta},w\right)}{r_k\left(w\right)}\ =\ \frac{2}{c^2}\int_0^w\ \mathrm{d}w'\ \frac{r_k\left(w-w'\right)}{r_k\left(w\right)}\boldsymbol{\nabla}_\perp\Phi\left[r_k\left(w'\right)\boldsymbol{\theta},w'\right]\ . \tag{337}$$

où r_k est la distance angulaire comobile décrite par l'équation (241), $w\ =\ \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}$ la distance comobile et $\boldsymbol{x}$ la séparation transverse comobile. Sachant par ailleurs que

$$\kappa\left(\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\theta}}.\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\theta_i} \tag{338}$$

on en déduit l'expression générale de la convergence, κ :

$$\kappa\left(\boldsymbol{\theta},w\right)=\frac{1}{c^2}\int_0^w\ \mathrm{d}w'\ \frac{r_k\left(w-w'\right)r_k\left(w'\right)}{r_k\left(w\right)}\ \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Phi\left[r_k\left(w'\right)\boldsymbol{\theta},w'\right]\ . \tag{339}$$

Les dérivées secondes de Φ expriment le Laplacien du potentiel comobile associé à une perturbation $\delta\times\bar{\rho}$ située sur la ligne de visée et donc[11]

$$\Delta\Phi=4\pi GR^2(t)\bar{\rho}\ \delta=4\pi GR^2(t)\frac{\bar{\rho}_0}{R^3(t)\rho_c}\rho_c\ \delta=4\pi GR^2(t)\Omega_0\ \frac{3H_0^2}{8\pi G}\frac{1}{R(t)}\delta \tag{340}$$

soit

$$\Delta\Phi=\frac{3H_0^2}{R(t)}\Omega_0\ \delta \tag{341}$$

Pour des perturbations faibles du champ de matière, on peut développer en série de Taylor le contraste de densité de matière δ et exprimer κ au premier ordre :

$$\kappa^{(1)}\left(\boldsymbol{\theta},z\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2\Omega_0\ \int_0^z\ \frac{\mathrm{d}z}{\left(1+z\right)H\left(z\right)}\frac{d_A\left(z',z\right)d_A\left(z'\right)}{d_A\left(z\right)}\delta_{mass}^{(1)}\left(\boldsymbol{\theta},z\right)\ , \tag{342}$$

où les d_A sont les distances angulaires données par l'équation (265). On peut alors montrer que dans le cas d'un spectre de fluctuation de la forme $P(k)\propto k^n$ est des sources situées à une distance $z=z_s$ on a :

---

[11]Le terme R(t) vient du fait qu'il s'agit du Laplacien comobile et donc $\nabla_x{=}R\nabla_r$

1. Variance du champ de convergence :

$$\left\langle \kappa^2\left(\theta\right)\right\rangle^{1/2} \approx 0.01\ \sigma_8 \Omega_0^{0.8} \left(\frac{\theta}{1\mathrm{deg.}}\right)^{-\frac{n+2}{2}} z_s^{0.75}\ ; \qquad (343)$$

2. Relation entre la variance de κ et celle de γ :

$$\left\langle \kappa^2\left(\theta\right)\right\rangle = \left\langle \gamma^2\left(\theta\right)\right\rangle\ ; \qquad (344)$$

3. Dissymétrie du champ de convergence :

$$S_3\left(\kappa\right) \approx 40\ \Omega_0^{-0.8}\ z_s^{-1.35}\ . \qquad (345)$$

Les propriétés (1) et (3) indiquent que si on parvient à mesurer la variance et la dissymétrie de la distribution (ou "skewness"), on peut alors obtenir simultanément Ω_0 et σ_8 (la normalisation du spectre de puissance des fluctuations). La propriété (2) nous indique qu'on peut mesurer la variance de κ à partir de celle de γ. Or, en régime de distorsion gravitationnelle faible, γ est directement l'ellipticité mesurée des galaxies. Donc, on peut sonder les modèles d'univers par la cartographie des ellipticité des galaxies du ciel.
La figure 65 montre les résultats actuels. Aucune mesure de la dissymétrie n'a encore été éffectuée, les contraintes sont uniquement fondées sur la variance.

Méthode	$(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$
SNIa (High-z Supernovae Team)	$\Omega_m \approx 0.24$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$
SNIa (Supernovae Cosmology Project)	$\Omega_m \approx 0.28$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$
Quasars	$\Omega_\Lambda < 0.9$
Arcs/Deplétion	$\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$
BOOMERANG + MAXIMA	$\Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1$
Distortions gravitationnelles	$0.15 < \Omega_m < 0.75$
	$1.2 < \sigma_8 < 0.5$
2dF : distorsion en redshift	$\Omega_m \approx 0.3$ et $b \approx 1$
Amas de galaxies	$\Omega_m < 0.4$

Table 3.: *Un court résumé des estimations de la constante cosmologique. Les contraintes des quatre premières lignes sont données dans l'hypothèse où* $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

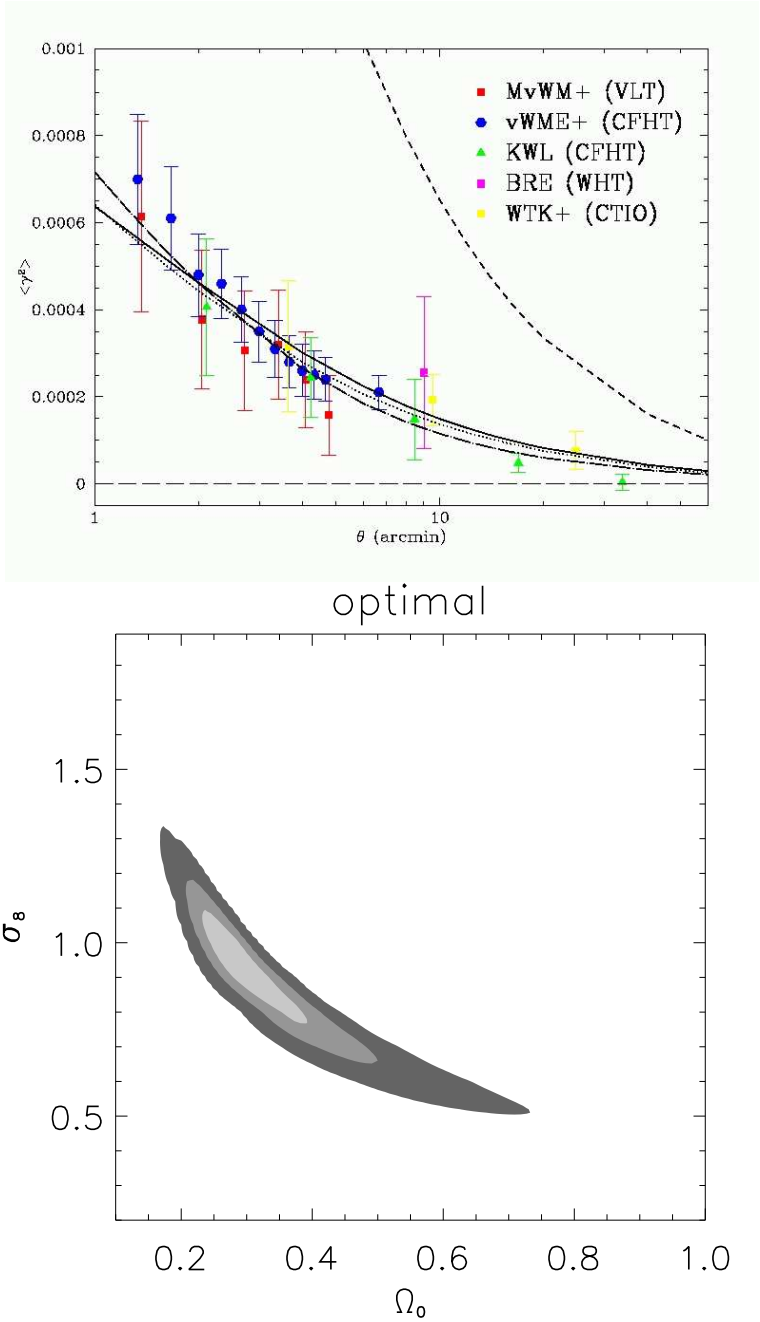

Figure 65.: *Les premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique. En haut, mesures de la variance du cisaillement gravitationnel en fonction de l'échelle angulaire. Les courbes représentent des modèles cosmologiques. On remarque en particulier le modèle CDM standard normalisé sur COBE qui est rejeté à plus de 5σ (d'après Maoli et al 2001, A&A 368, 766). En bas, les toutes nouvelles contraintes cosmologiques dans un plan $\Omega - \sigma_8$ (d'après van Waerbeke et al 2001, A&A 374, 757).*

Contrainte des anisotropies du fond diffus cosmologique. Bien que globalement le fond diffus cosmologique soit remarquablement isotrope, des anisotropies d'origine cosmologique s'ajoutent aux contributions de notre Galaxie et à l'effet Doppler dû au mouvement du Groupe Local. Ces fluctuations sont engendrées par des perturbations sur les photons émis par la surface de dernière diffusion à $z \approx 1000$ (anisotropies primaires) ou bien par des effets de diffusion le long de la ligne de visée (anisotropies secondaire). Suivant la nature des perturbations, des échelles angulaires différentes sont affectées ce qui permet de reconstituer la contribution de chacune d'elles en analysant leur amplitude respective en fonction de l'échelle angulaire.
Il existe trois types de contributions primaires :

1. Les perturbations gravitationnelles (effet Sachs-Wolfe). Elles sont produites à l'émission de photons piégés dans des régions denses de la surface de dernière diffusion. Ces photons subissent un effet de décalage spectral gravitationnel pour s'extraire du champ de gravité des régions denses, ce qui produit une variation de température du corps noir :
$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\Phi}{3c^2} \, . \tag{346}$$
On comprend que ce phénomène dépende des paramètres Ω_m et Ω_Λ puisqu'il dépend des fluctuations du champ de densité.
2. Les perturbations de vitesse (ou Doppler) produites par les mouvements du plasma à la surface de dernière diffusion. Elles engendrent des fluctuations de la forme
$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta v}{c} \tag{347}$$
et enfin
3. les perturbations adiabatiques produites par la compression du champ de rayonnement dans les régions de haute densité qui accroît sa température. L'accroissement de température retarde localement la recombinaison, qui se produit donc à un décalage spectral plus faible. La fluctuation de température est directement
$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta z}{1+z} \, . \tag{348}$$

Les trois effets n'affectent pas les mêmes échelles. L'effet Sachs-Wolfe perturbe les grandes échelles angulaires, les effets Doppler et adiabatiques les échelles intermédiaires. La mesure des fluctuations selon les échelles permet donc en principe de contraindre les modèles cosmologiques.

Les amplitudes des termes d'anisotropie en fonction de l'échelle angulaire sont évaluées en décomposant les fluctuations de température en harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}\left(\theta, \phi\right) \tag{349}$$

dont les moments multipolaires, $C_l = \left\langle |a_{lm}|^2 \right\rangle$ peuvent être reliés au spectre de fluctuation de densité $P(k)$. En particulier aux grandes échelles angulaires comme celles mesurées par COBE, on a

$$C_l = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{H_0}{c}\right)^4 \int_0^\infty \frac{P(k)}{k^2} j_l^2\left(2ck/H_0\right)\ \mathrm{d}k\ , \tag{350}$$

où les j_l sont les fonctions de Bessel sphériques.
Le terme dipolaire est dominant mais est dû au mouvement du Groupe Local (voir figure 66, première figure en haut) qui engendre un décalage Doppler

$$T\left(\theta\right) = T_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{351}$$

dont l'amplitude correspond à $v = 600$ km.sec^{-1}.
Le premier terme cosmologique est la composante quadrupolaire. Les mesures les plus récentes sont celles des expériences embarquées DMR sur COBE (satellite), BOOMERANG, MAXIMA (ballons) et DASI (interféromètre). Les satellites MAP (lancé avec succès en juin 2001, il commencera ses observations avant la fin de l'année 2001) puis Planck (2007) devraient fournir des résultats couvrant la totalité du ciel. COBE a détecté les anisotropies aux très grandes échelles. BOOMERANG, MAXIMA puis DASI ont détecté le premier pic acoustique avec certitude, et semblent montrer les second et troisième pics. Grâce à ces expériences nous avons aujourd'hui des arguments très forts en faveur d'un univers à courbure nulle (voir les figures 67 et 68).

9.4 La matière noire

En dépit des incertitudes sur la mesure des masses des systèmes, les courbes de rotation plates des galaxies spirales et les arcs gravitationnels dans les amas de galaxies sont des preuves convaincantes qu'il existe une fraction de la matière qui n'émet aucun rayonnement. Le tableau 2 et la figure 62 montrent clairement une tendance du rapport M/L à croître avec la masse et la dimension de la structure. Il semble donc que la distribution de la matière noire et peut-être sa nature dépendent de l'échelle. Comme on le verra par la suite, l'abondance de baryon prédite

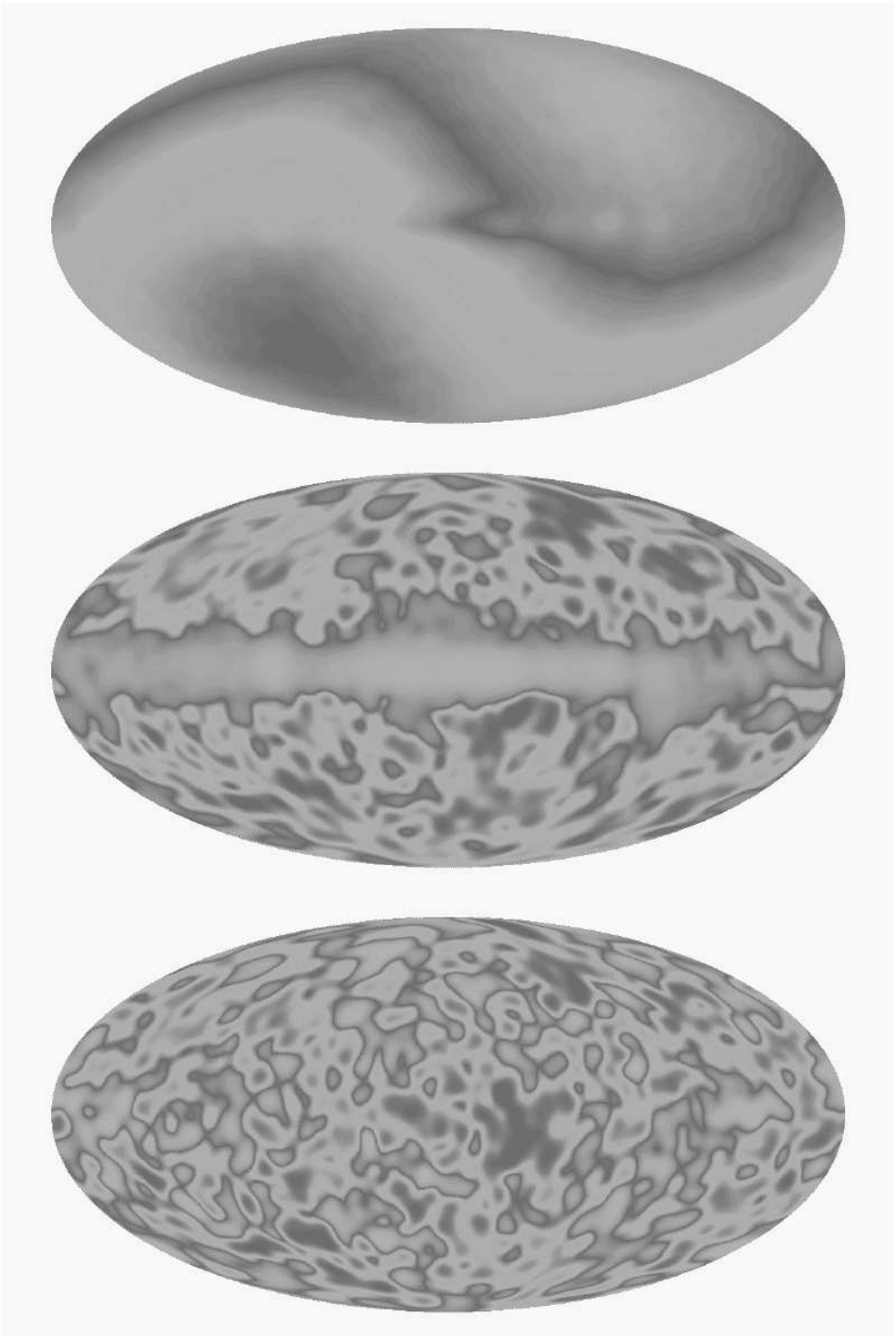

Figure 66.: *Carte de l'instrument DMR du satellite COBE montrant les anisotropies du fond diffus. En haut la composante dipolaire, signature du mouvement du Groupe Local. Au milieu, la contribution de notre Galaxie. Enfin en bas, la carte des anisotropies cosmologiques.*

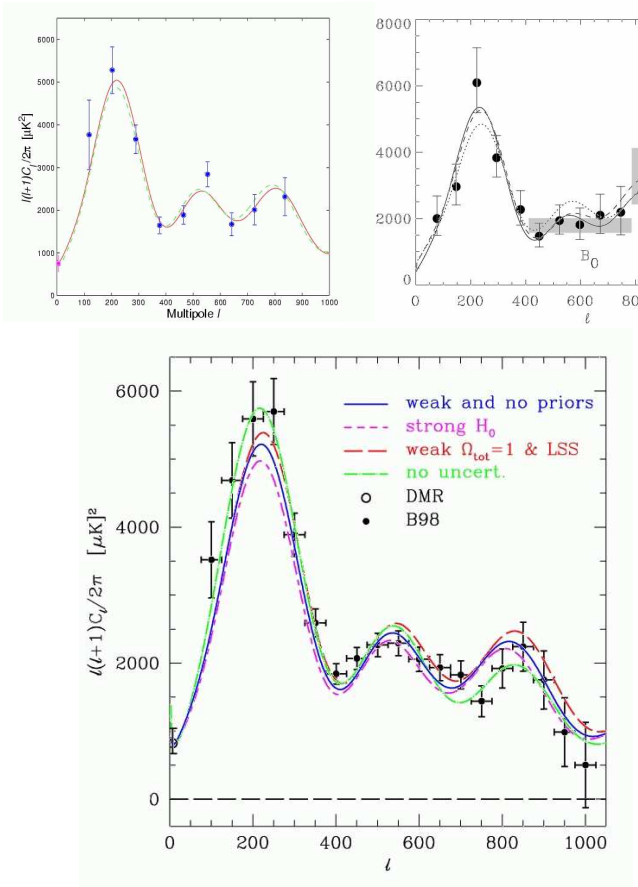

Figure 67.: *Mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique à différentes échelles par l'interféromètre DASI (en haut à gauche ; d'après Pryke et al 2001, astro-ph/0104490) et les expériences embarquées en ballon MAXIMA-I (en haut à droite ; d'après Stompor et al 2001, astro-ph/0105062) et BOOMERANG (en bas à droite ; d'après Netterfield et al 2001, astro-ph/0104460). Le premier pic acoustique est bien détecté, le second le troisième semblent bien présents. La position et l'amplitude du second pic sont en accord avec les prédictions indépendantes de la nucléosynthèse primordiale. En abscisses sont portés les ordres du développement multipolaire : plus l est grand plus l'échelle angulaire diminue (l'échelle angulaire $\theta \approx 180^o/l$). À partir de ces mesures on reconstruit les contributions à chaque échelle que l'on compare aux prédictions théoriques. Les courbes continues montrant les meilleurs ajustements. Par exemple, pour les ajustements des données de BOOMERANG ils correspondent à* $(\Omega_{tot}, H_0, \Omega_\Lambda, \Omega_b, \Omega_c, n_s, \tau_c, t_0) = (1.05, 50, 0.5, 0.02, 0.12, 0.925, 0.0, 13.8\ Gyrs)$ *[Courbe "weak and no priors"] et* $(1.0, 68., 0.7, 0.02, 0.12, 0.957, 0.0, 13.8\ Gyrs)$ *[Courbe "strong H_0"]. $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$. où l'indice b se rapporte au baryon et l'indice c à la matière noire, n_s est l'indice du spectre des fluctuation ($P(k) \propto k^{n_s}$) et enfin τ_c indique la profondeur optique à l'époque de la re-ionisation.*

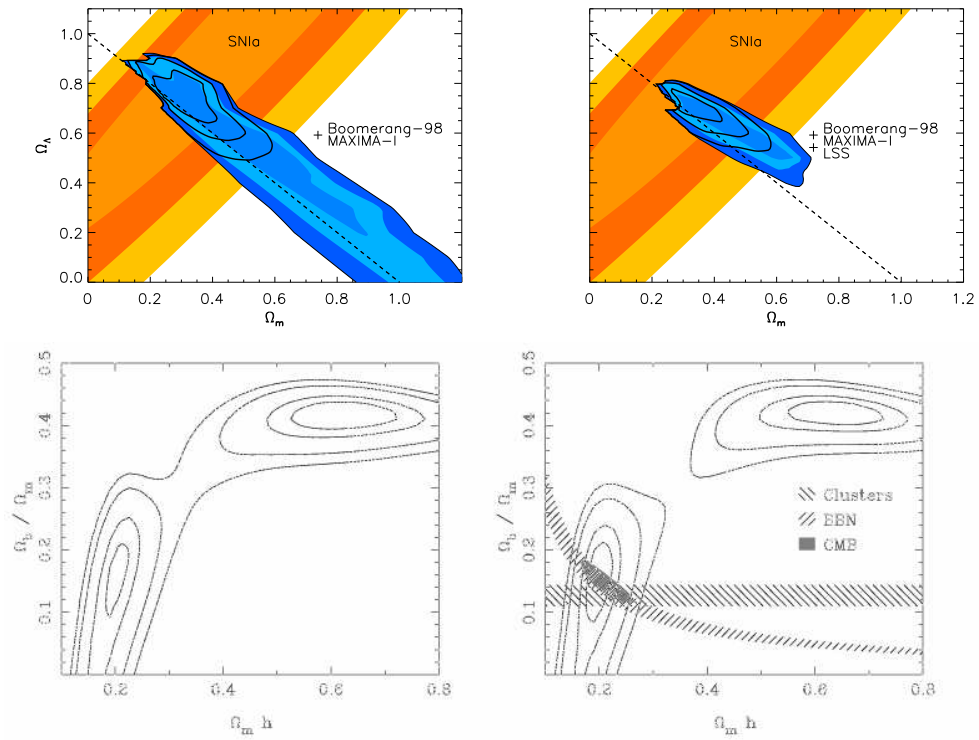

Figure 68.: *En haut : diagramme* $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ *résumant la situation actuelle des contraintes sur ces deux paramètres (d'apès Jaffe et al Phys. Rev. Lett., 86, 3475). En haut, contraintes cumulées des expériences CMB + SNIa. En bas, mêmes données auxquelles est ajoutée la mesure de la normalisation du spectre de puissance des fluctuations qui est fournie notamment par des données externes, comme l'abondance des amas de galaxies ou le cisaillement gravitationnel cosmologique. En bas : contraintes sur* $(\Omega_m\ h, \Omega_b)$ *obtenue à partir du grand relevé en redshift* $2dF$ *(d'après Percival et al 2001, astro-ph/0105252). À gauche, les contours sont établis uniquement à partir du relevé spectroscopique* $2dF$*. À gauche, sont ajouées les zones de confiance déduites des expériences MAXIMA-I + BOOMERANG (CMB), de l'analyse des amas de galaxies émetteurs X (clusters) et de la nucléosynthèse primordiale (BBN). Ce type d'analyse conjointe qui utilise tous les grands relevés optique, infrarouge, X, millimétrique, centimétrique, etc... et portant sur l'analyse des amas de galaxies, des relevés en redshift, du CMB, des lentilles gravitationnelles et des supernovae, est l'approche la plus solide compte tenu de la multitude de paramètres dont dépendent les scénarios cosmologiques.*

par la nucléosynthèse primordiale peut marginalement rendre compte de la matière invisible contenue dans les halos des galaxies mais n'est pas compatible avec le Ω déduit des mesures aux plus grandes échelles. La matière noire est donc vraisemblablement en majorité de nature non-baryonique (c'est à dire que ses propriétés diffèrent de celles de nos protons et neutrons[12]).
On peut classer la matière noire en trois grandes catégories qui sont différenciées selon leur température : la *matière noire froide* (CDM), qui comprend en particulier les candidats baryoniques, la *matière noire tiède* (WDM) et la *matière noire chaude* (HDM). Il existe aussi une composante dite matière noire volatile correspondant aux particules à désintégration rapide. Le tableau 4 résume ces candidats.

Les observations et les expériences en laboratoire peuvent apporter des contraintes intéressantes qui limitent les candidats possibles. Les expériences de microlentille gravitationnelle permettent de tester les objets compacts baryoniques, comme les Jupiters, les naines brunes, les naines blanches (expériences EROS, MACHOs, OGLE, AGAPE). Les observations continues des nuages de Magellan ont permis de détecter un certain nombre d'événements à relativement longue durée qui doivent correspondre à des objets compacts d'envrion 0.5 $M_\odot$. Par contre aucun phénomème à courte durée n'a encore été détecté. Ces suivis permettent donc de conclure que la fraction d'objets compacts de masse inférieure à 0.05 $M_\odot$ dans le halo de la Galaxie est très faible. En revanche il est possible que les objets compacts de masse environ 0.5 $M_\odot$ représentent 20 à 50% de la masse du halo de la Galaxie (figure 69).
On peut potentiellement étendre ces méthodes aux effets transitoires de microlentille gravitationnelle produits par d'hypothétiques trous noirs extragalactiques. C'est donc aussi une méthode directe pour sonder la distribution de matière invisible compacte intergalactique. Cependant, en pratique ce sont des expériences très longues et difficiles qui, dans le cas de trous noirs intergalactiques, demandent des suivis sur plus de 10 ans.
Les candidats exotiques à la matière noire sont très nombreux. Parmi les plus sérieux on compte le neutrino massif, l'axion et les WIMPS.
Le neutrino est le meilleur candidat pour la matière noire chaude. Sa contribution à la densité actuelle de l'univers est relativement bien com-

[12]Dans le contexte des discussions sur la matière noire, les électrons sont fréquemment inclus dans cette composante baryonique, même si ce ne sont pas des baryons. Le terme est donc assez générique

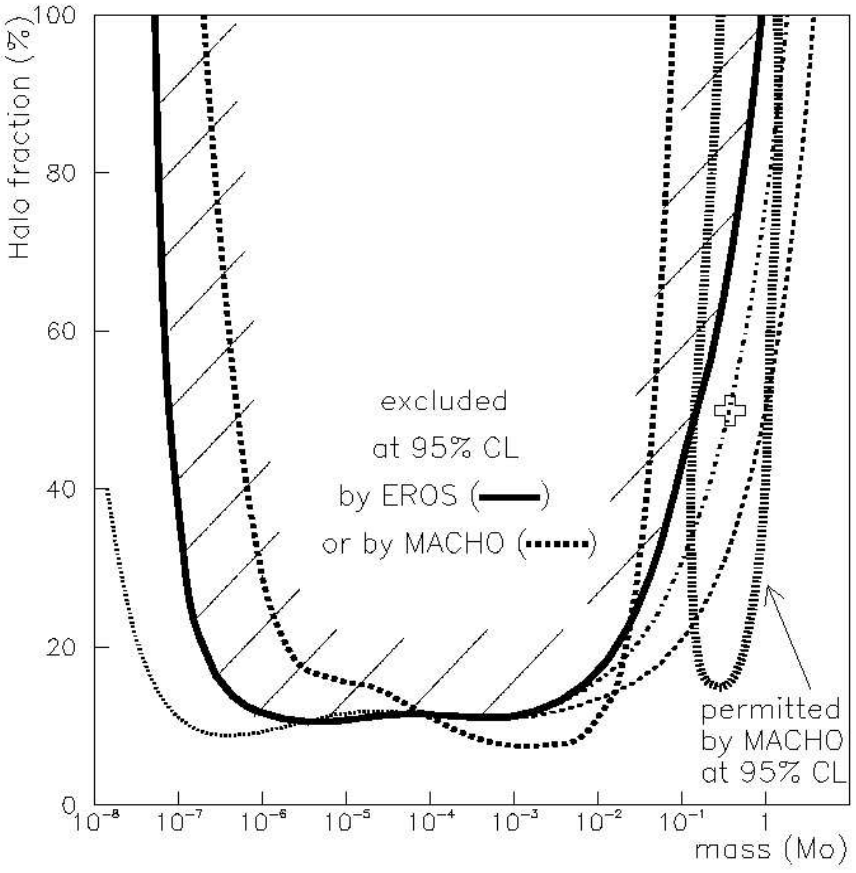

Figure 69.: *Diagramme d'exclusion définissant l'intervalle de masse et la fraction du halo composée de MACHOs. Les figures montrent les zones permises à la fois par les expériences MACHOs et EROS. L'absence d'événements à courte période permet de limiter fortement la région des petites masses. On voit que le domaine possible est très limité. La composante baryonique sous forme d'objets compacts est donc loin de rendre compte de la matière noire dans les galaxies et a fortiori dans l'univers.*

prise et vaut (voir équation 71) :

$$n_{\nu 0} = \frac{3}{4}\frac{4}{11} n_{\gamma 0} = 117 \text{ neutrinos.cm}^{-3} \ . \tag{352}$$

Le coefficient (3/4) étant le rapport du nombre de degrés de liberté du photon relativement au neutrino. Le rapport (4/11) provient de la perte d'une fraction de neutrino par annihilation e^+e^- lorsque la température de l'univers a atteint celle de la masse e^+e^-.
Sachant que la densité de l'univers est $\Omega\rho_c$ et que

$$\rho_c = 1.88 \times 10^{-29} \ h^2 \text{ g.cm}^{-3} = 10.5 \times 10^3 \ h^2 \text{eV.cm}^{-3} \ , \tag{353}$$

la contribution à la densité d'un neutrino de masse m_ν serait

$$F_\nu = \frac{m_\nu n\nu}{10.5 \times 10^3 \Omega h^2} = \left(\frac{m_\nu}{90 \text{ eV}}\right) \frac{1}{\Omega h^2} \ . \tag{354}$$

Les recherches actuelles de neutrinos atmosphériques ou de neutrinos solaires semblent indiquer que

$$F_\nu << 1 \ . \tag{355}$$

Le spectre de puissance de la distribution des galaxies aux grandes échelles et la découverte de galaxies à très grand décalage spectrale s'opposent aussi à l'hypothèse que la matière noire chaude contribue majoritairement à la composante matérielle de l'univers. En effet, leur grande vitesse leur permet de s'échapper rapidement des fluctuations de petite échelle ce qui tend à tuer les fluctuations de masse inférieures à 10^{15} $M_\odot$. Ainsi, le processus de formation des galaxies à partir des fluctuations aux petites échelles est fortement ralenti et les galaxies ne parviennent pas à ce former rapidement. L'existence de galaxies à grand redshift (les plus lointaines sont à à $z \approx 6$) est dès lors une difficulté pour ces modèles.
Une expérience cruciale concernant ces candidats est bien évidemment la détermination de la masse des neutrinos. Bien qu'il ait été annoncé que cette masse avait été mesurée (expérience Super Kamionkande au Japon), rien n'est encore fermement établi et certains résultats sont encore contradictoires. Les limites actuelles sont

$$\nu_e < 10 \text{ eV} \qquad \nu_\mu < 170 \text{ keV} \qquad \nu_\tau < 18.2\text{MeV} \tag{356}$$

En fait, toutes les observations actuelles en cosmologie favorisent les modèles d'univers avec une composante de matière noire non-baryonique froide. Il semble que les meilleurs candidats actuels soient

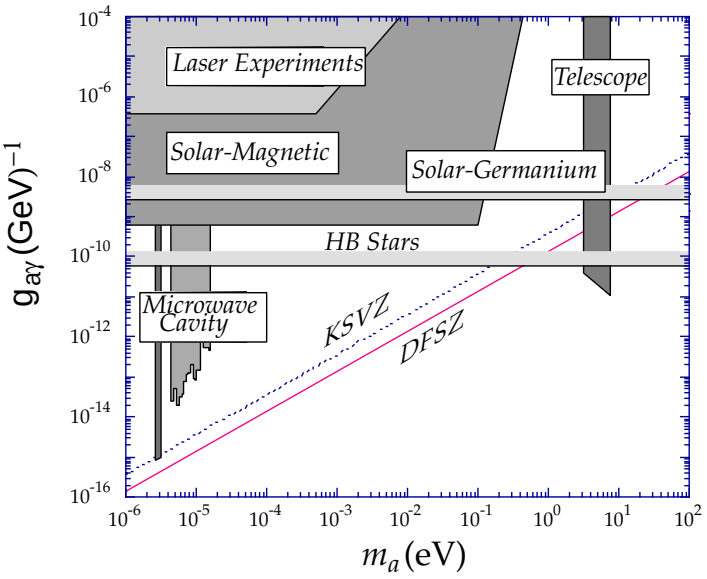

Figure 70.: *Diagramme d'exclusion des recherches actuelles sur les axions. Les zones hachurées sont exclues. En abscisse est portée la masse et en ordonnée le couplage photon-axion qui permet la désintégration $ax \to \gamma\gamma$. Dans le domaine eV, la désintégration des axions en photons aurait dû être détectée avec les télescopes actuels, ce qui explique la contrainte reportée sur cette figure.*

- l'axion, qui est un champ des modèles de chromodynamique quantique ajouté au champ de Higgs pour tuer la composante de moment dipolaire électrique qui, d'après les expériences en laboratoire, est nulle. Les contraintes actuelles sont portées sur la figure 70.

- les WIMPS, acronyme pour *Weakly Interacting Massive Particles*, sont aussi une multitude et font référence, entre autres, aux particules construites dans les modèles supersymétriques. Les théories supersymétriques prédisent l'existence de nouvelles particules qui sont des partenaires des fermions et des bosons. Les contraintes actuelles sur ces particules sont peu nombreuses, mais un grand nombre d'expériences sont en cours ou en projet car les WIMPS sont parmi les candidats sérieux pour la matière noire. Ces expériences sont résumées sur la figure 71.

Candidat	Nature	catégorie	masse approximative
Jupiters	baryonique	matière noire froide	0.001 $M_\odot$
Naines brunes	baryonique	matière noire froide	0.08-0.01 $M_\odot$
Naines blanches	baryonique	matière noire froide	0.1-0.5 $M_\odot$
Étoiles à neutrons	baryonique	matière noire froide	0.1 $M_\odot$
Trous noirs stellaires	baryonique	matière noire froide	$\approx$ 1. $M_\odot$
Trous noirs massifs	baryonique	matière noire froide	10^{5-6} $M_\odot$
Trous noirs primordiaux	baryonique	matière noire froide	?
Axion	non-baryonique	matière noire froide	10^{-5} eV
SUSY-LSP neutralino	non-baryonique-WIMPS	matière noire froide	MeV
gravitino	non-baryonique	matière noire tiède	500 eV
neutrinos	non-baryonique	matière noire chaude	keV
majorons	non-baryonique	matière noire chaude	10^{-5} eV

Table 4.: *Liste de quelques candidats à la composante invisible de l'univers.*

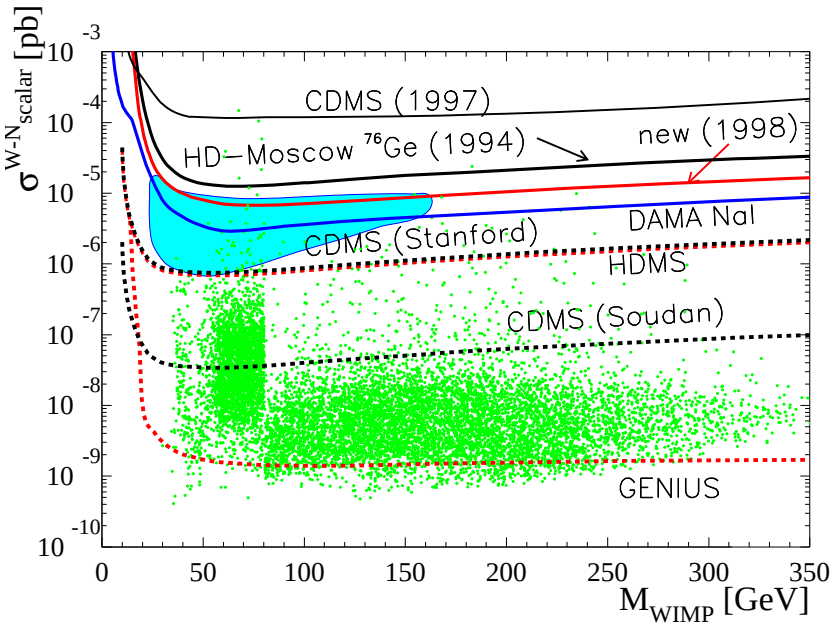

Figure 71.: *Diagramme d'exclusion des recherches sur les WIMPS. En abscisse est portée la masse et en ordonnée la section efficace d'annihilation qui détermine la stabilité de la particule. Les lignes noires continues sont les contraintes actuelles et les lignes discontinues sont les futures expériences. Les points répartis sur la figure sont les paramètres prédits par les modèles supersymétriques. On voit que les futures expériences seront déterminantes.*

10. Évolution du spectre du corps noir cosmologique

Nous avons vu que la découverte de l'expansion de l'univers conduit inévitablement à un univers dont la densité devait être très élevée dans le passé. Le taux d'accroissement est

$$\rho = \rho_0 \left(1+z\right)^4 \tag{357}$$

Par ailleurs, les observations du spectre du fond cosmologique démontrent qu'il s'agit d'un rayonnement de corps noir.
Il est possible de démontrer que l'expansion de l'univers conserve le corps noir, mais en modifie sa température. En effet, soit $n_\nu d\nu$ la densité de photons dans le domaine de fréquence ν et $\nu + d\nu$. On a, pour un corps noir :

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{358}$$

Le nombre total de photons est donc

$$n = \int_0^\infty n_\nu d\nu = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \qquad (359)$$

où $\zeta(3) = 2.404$.
La densité d'énergie de rayonnement est

$$u_r = \rho c^2 = \int_0^\infty h\nu \; n_\nu d\nu = aT^4 \qquad (360)$$

À cause de l'expansion, la fréquence d'un photon est décalée et devient $\nu' = \nu(1+z)$. Le nombre de photons dans ce domaine de fréquence contenus dans un volume V est par ailleurs $N_\nu d\nu = n_\nu V d\nu$. Or, l'expansion affecte le volume qui devient $V' = V/(1+z)^3$. Si les photons sont sans interaction, alors leur nombre doit être conservé

$$n_\nu V d\nu = n'_{\nu'} V' d\nu' \qquad (361)$$

Donc

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right] V d\nu = \frac{8\pi\nu^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1}\right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z)\, d\nu \qquad (362)$$

soit

$$\frac{8\pi\nu^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1}\right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1}\right] V d\nu \qquad (363)$$

Ainsi, le spectre est toujours celui d'un corps noir mais de température

$$T' = \frac{T}{1+z} \qquad (364)$$

On peut donc en permanence prédire la température de l'univers T à partir de la mesure de la température actuelle T_0 : $T = T_0(1+z)$. L'univers était donc plus chaud dans le passé et il a donc une histoire liée à cette évolution en température.

11. Histoire thermique de l'Univers

Dès 1946, Gamov avait envisagé que si l'univers était beaucoup plus chaud dans le passé, alors les réactions nucléaires qui ont du s'y produire pourraient expliquer l'origine et l'abondance des éléments. Gamov prédit

aussi qu'il devait exister un rayonnement fossile de cette période qu'il estima à environ 5 K. Malheureusement, Fermi en 1950 démontre qu'il n'y a aucun moyen de former des éléments lourds dans un univers chaud. Par ailleurs, la théorie de la nucléosynthèse stellaire apportait à la même période un cadre satisfaisant pour tenter d'expliquer la formation des éléments.

Ce n'est que vers 1960 que les idées concernant la nucléosynthèse primordiale et l'existence d'un rayonnement résiduel sont de nouveau considérées sérieusement. En fait, au moment de la découverte du rayonnement cosmologique par Penzias et Wilson, une équipe de Princeton avait déjà mis sur pied une expérience pour tenter de le mesurer. C'est la raison pour laquelle l'interprétation des observations de Penzias et Wilson fut immédiate.

Dans ce cours je ne vais pas entrer dans les détails de toute l'histoire thermique de l'univers ; j'aborderai essentiellement la partie nucléosynthèse. Les grandes lignes de l'histoire thermique sont décrites sur la figure 72.

Le principe de l'analyse de l'histoire thermique repose sur une idée de base relativement simple. Plaçons nous par exemple dans la période radiative. Un phénomène physique est caractérisé par une échelle de temps typique, τ, qui peut s'exprimer sous la forme

$$\tau = \frac{1}{n\sigma c} \tag{365}$$

où n est la densité de particules en interaction, σ la section efficace d'interaction et c la célérité de la lumière. Pendant cette période le facteur d'expansion $R \propto t^{1/2}$ alors que la densité $n \propto R^3$. Donc

$$\frac{\tau}{t} \propto \frac{R}{\sigma} \tag{366}$$

Les interactions ne seront donc efficaces que tant que $\tau/t \ll 1$. Mais comme R croît l'univers doit aller inéluctablement vers un stade où l'interaction devient négligeable. En particulier, toute phase d'équilibre maintenue par une interaction donnée doit évoluer vers une étape où l'équilibre est rompu. L'histoire de l'univers est donc une suite de phases d'équilibre où les transitions de phase sont des étapes majeures. Par la suite j'en décris quelques-unes.

11.1 Transition matière-rayonnement

Si ρ_m est la densité pendant la phase dominée par la matière et ρ_r est la densité pendant la phase dominée par le rayonnement, on a

$$\rho_m = \rho_c \Omega_m (1+z)^3 \tag{367}$$

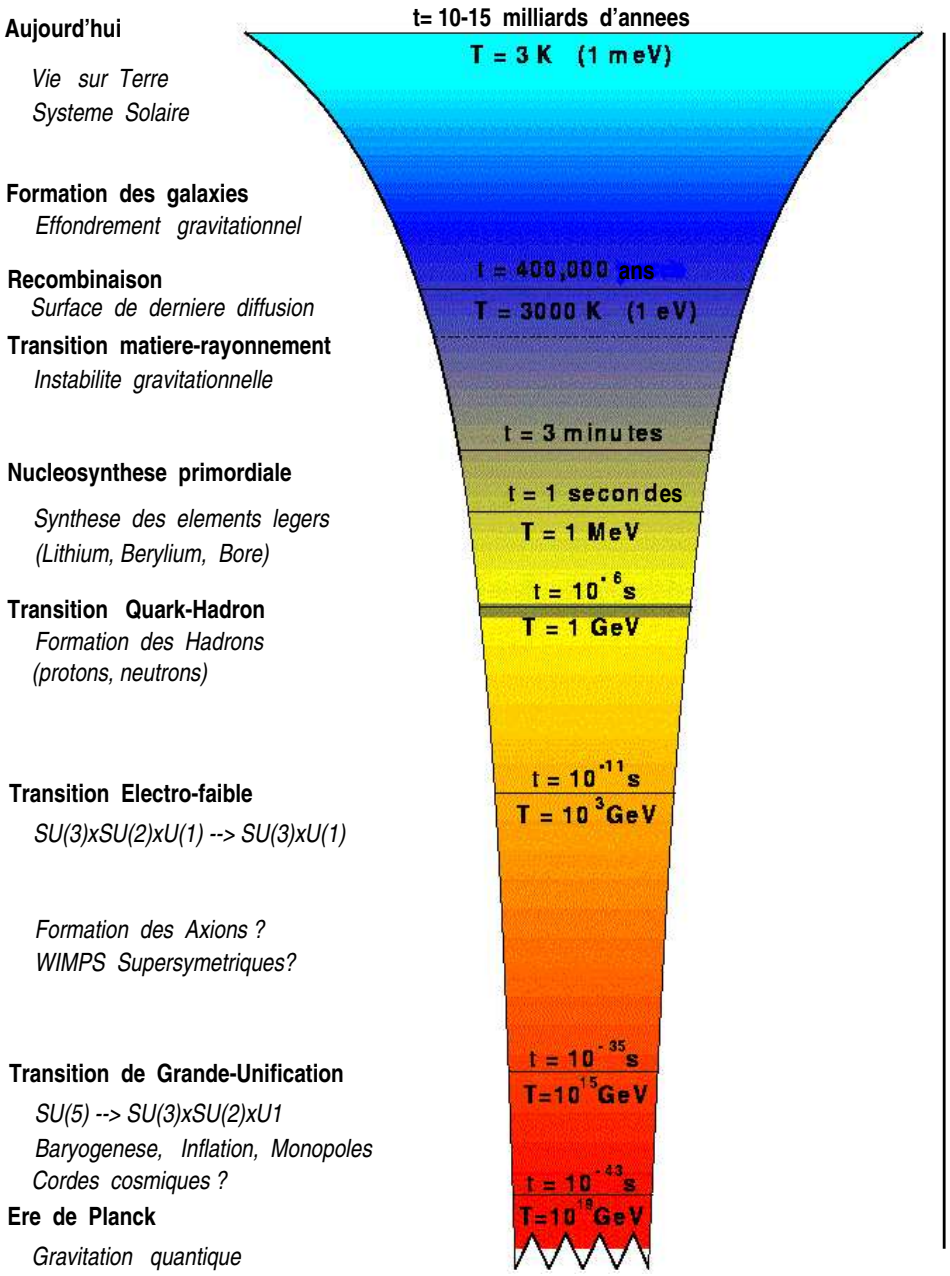

Figure 72.: *Une (très) brève histoire thermique de l'univers retraçant ses époques marquantes.*

et

$$\rho_r = \rho_c \Omega_r \, (1+z)^4 \tag{368}$$

La transition entre ces deux périodes se produit donc à

$$1 + z_{eq} = \frac{R_0}{R_{eq}} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \tag{369}$$

Les observations donnent les valeurs actuelles : $\Omega_m \geq 0.2$ et $\Omega_r h^2 = 2.56\ 10^{-5}$. Donc

$$1 + z_{eq} = 3.9 \times 10^4 \ \left(\Omega h^2\right) \tag{370}$$

correspondant à une température T_{eq}

$$T_{eq} = (1 + z_{eq}) = 1.07 \times 10^5 \left(\Omega h^2\right) K = 9.24 \left(\Omega h^2\right) eV \tag{371}$$

et au temps t_{eq}

$$t_{eq} = 0.4 \frac{1}{H_0} \frac{1}{\Omega^{1/2}} \, (1+z)^{-3/2} \tag{372}$$

soit

$$t_{eq} = 1.57 \times 10^{10} \left(\Omega h^2\right)^{-1/2} \text{sec} = 500 \left(\Omega h^2\right)^{-1/2} \text{ans} \tag{373}$$

11.2 Découplage et recombinaison

Dans la phase chaude de l'histoire de l'univers, matière et rayonnement étaient en fort contact thermique à cause du taux d'interaction élevé entre photons et électrons. Mais au fur et à mesure de l'expansion, la densité d'électrons libres diminue et va finir par devenir trop faible pour maintenir l'efficacité de l'interaction : photons et électrons *se découplent.* Grossièrement, cette étape se produit lorsque le libre parcours moyen des photons devient plus grand que la distance de Hubble à la période considérée, c/H.
Le taux d'interaction photons–électrons est donné par

$$\tau_\gamma = n_e \sigma_T c \tag{374}$$

où n_e est la densité numérique d'électrons libres et σ_T la section efficace de Thomson ($=6.65\ 10^{-25}$ cm^2).
L'équilibre des abondances des électrons libres est déterminé par l'équation de Saha. Si n_H est la densité numérique d'hydrogène, n_p la densité numérique de protons libres et n_e la densité numérique d'électrons libres (on néglige les noyaux d'Hélium), la neutralité de charge de l'univers implique

$$n_e = n_p \tag{375}$$

La conservation du nombre de baryons, n_B, implique

$$n_B = n_p + n_H \tag{376}$$

À l'équilibre thermique, pour des températures inférieures à $m_i c^2$, la densité du constituant i est

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{\mu_i - m_i}{T}\right] \tag{377}$$

où $i = e, p, H$ et μ_i est le potentiel chimique.
L'équilibre chimique

$$p + e \Longrightarrow H + \gamma \tag{378}$$

garantit que

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H \tag{379}$$

et donc

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_e} n_p n_e \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{B}{T}\right] \tag{380}$$

où B est l'énergie de liaison de l'Hydrogène : $B = (m_p + m_e - m_H)c^2$=13.6 eV.
On appelle *fraction d'ionisation*, la quantité

$$X_e = \frac{n_p}{n_B} \tag{381}$$

Sachant que $g_p = g_e = 2$ et $g_H = 4$ et en posant $n_B = \eta n_\gamma$, on peut déterminer la fraction d'ionisation à l'équilibre, X_e^{eq} et l'exprimer sous la forme

$$\frac{1 - X_e^{eq}}{\left(X_e^{eq}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} e^{\frac{B}{T}} \tag{382}$$

qui est l'équation de Saha pour la fraction d'ionisation à l'équilibre. Le rapport baryons sur photons, η, est contraint par les observations :

$$\eta = 2.68 \times 10^{-8} \ \left(\Omega_B h^2\right) \tag{383}$$

Il est clair que l'équation (382) trace l'évolution de la fraction d'ionisation puisque T varie comme $(1 + z)$. Par définition, la *(re)combinaison* est la période où 90% des électrons se sont recombinés avec les protons. Cette époque se situe à

$$z_{rec} = 1200 - 1400 \tag{384}$$

Par exemple, pour $z_{rec} = 1300$, on a $T_{rec} = T_0(1 + z_{rec}) = 3775\ K = 0.308$ eV. Compte tenu du z_{eq} calculé dans la section précédente, on voit

que la recombinaison s'est produite pendant la phase dominée par la matière. On peut donc facilement déterminer l'âge auquel s'est déroulée la recombinaison

$$t_{rec} = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}\left(\frac{1}{\Omega}\right)^{1/2}(1+z)^{-3/2} \tag{385}$$

soit

$$t_{rec} = 4.39 \times 10^{12}\ \left(\Omega h^2\right)^{-1/2}\ \text{sec} = 140000\left(\Omega h^2\right)^{-1/2}\ \text{ans} \tag{386}$$

Il peut paraître surprenant que la recombinaison se produise à $\approx 4000\ K$ et non pas à $\approx 150000\ K$ correspondant à 13.6 eV. C'est une conséquence de la distribution en énergie des photons qui est très large. En fait, il suffit qu'un photon sur 10^8 ait une énergie supérieure à 13.6 eV pour avoir assez de photons ionisants.
En utilisant l'équilibre d'ionisation et le fait que la densité d'électrons libres est

$$n_e = X_e n_B = X_e \eta n_\gamma \approx 1.13 \times 10^{-5}\text{cm}^3\ \left(\Omega_B h^2\right) \tag{387}$$

et que

$$\tau \approx \frac{1}{n_e \sigma_T c} \tag{388}$$

et enfin que l'âge de l'univers est

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)(1+z)^{-3/2}\, H_0^{-1}\Omega_0^{-1/2} \tag{389}$$

on peut estimer la période de découplage qui correspond à $t \approx \tau$. Comme le libre parcours moyen des photons dépend de Ω_B et que l'âge de l'univers dépend de Ω, le redshift au découplage dépend donc de ces deux paramètres essentiels.
Grossièrement le découplage se produit entre $z = 1100$ et $z = 1200$ et donc

$$t_{dec} = \left(\frac{2}{3}\right) H_0^{-1}\Omega_0^{-1/2}\,(1+z_{dec})^{-3/2} \tag{390}$$

soit, pour $z = 1100$

$$t_{dec} = 5.64 \times 10^{12}\left(\Omega_0 h^2\right)^{-1/2}\ \text{sec} = 180000\left(\Omega_0 h^2\right)^{-1/2}\ \text{ans} \tag{391}$$

On voit que le découplage se produit après la recombinaison. Remarquablement, il se produit dans un tout petit intervalle en redshift. Ceci est essentiellement un effet de profondeur optique qui dépend très fortement de l'état d'ionisation (voir l'équation (273) qui décrit comment calculer cette profondeur optique). Le $\Delta z \approx 100$ est donc une véritable barrière opaque. On l'appelle la *surface de dernière diffusion.*

11.3 Nucléosynthèse primordiale des éléments légers

La période de la nucléosynthèse primordiale est particulièrement importante car elle founit une des contraintes les plus solides sur l'abondance de baryons dans l'univers. La physique de base suit l'idée générale décrite en préliminaire à toute cette section. Soit une particule d'énergie totale bien plus grande que son énergie au repos, $kT \gg mc^2$. Si les échelles de temps des interactions qui maintiennent les espèces en équilibre thermique avec les autres espèces présentes à la température T sont plus courtes que l'âge de l'univers, alors la densité numérique d'une particule et de son anti-particule est

$$n = \bar{n} = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\frac{E}{kT}} \pm 1} dp \tag{392}$$

où g est le poids statistique de la particule, p est la quantité de mouvement, et les signes $+$ et $-$ désignent respectivement les fermions et les bosons. Pour les photons (bosons), $g = 2$, pour les nucléons (fermions), $g = 2$, et enfin pour les neutrinos (fermions), $g = 1$.
On a, pour une densité numérique n et pour la densité d'énergie ε :

$$\begin{cases} n_\gamma = 0.244 \left(\dfrac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_\gamma = aT^4 \\ n_{nuc} = 0.183 \left(\dfrac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{nuc} = \dfrac{7}{8} aT^4 \\ n_{\nu_{e,\mu}} = 0.091 \left(\dfrac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{\nu_{e,\mu}} = \dfrac{7}{16} aT^4 \end{cases} \tag{393}$$

et plus généralement

$$\varepsilon = \chi(T) aT^4 \tag{394}$$

Lorsque les particules deviennent non-relativistes, $kT \ll mc^2$, les abondances s'expriment alors sous la forme

$$n = g \left(\frac{mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}} \tag{395}$$

Considérons les découplages protons et neutrons. On se place dans le cas où protons et neutrons sont non-relativistes mais leur équilibre est maintenu par les interactions électrons-neutrinos

$$e^+ + n \rightleftharpoons p + \bar{\nu_e} \tag{396}$$

$$\nu_e + n \rightleftharpoons p + e^- \tag{397}$$

et l'abondance relative des neutrons et protons est

$$\frac{n}{p} = \exp\left[-\frac{\Delta m c^2}{kT}\right] \tag{398}$$

Elle sera gelée dès que les interactions des neutrinos ne pourront maintenir l'équilibre neutrons-protons. La condition de gel se produit lorsque l'échelle de temps des interactions faibles devient supérieure à l'âge de l'univers :

$$t_{weak} = \frac{1}{n\sigma_{weak}c} \tag{399}$$

où σ_{weak} est la section efficace de l'interaction faible ($\sigma_{weak} \propto E^2$ où E est l'énergie), et n est la densité numérique de nucléons. À cause de l'expansion nous savons que

$$n \propto \frac{1}{R^3} \quad ; \quad R \propto \frac{1}{T} \quad ; E \propto T \tag{400}$$

et donc

$$t_{weak} = \propto \frac{1}{T^5} \tag{401}$$

Cette échelle de temps doit être comparée à celle de l'expansion de l'univers. Or dans la phase dominée par le rayonnement et pour $z \gg z_{eq}$ on a $\Omega \approx 1$, et donc les équations de Friedmann s'écrivent

$$\begin{cases} 2\dfrac{\ddot{R}}{R} + \left(\dfrac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx -\dfrac{8\pi G}{c^2}\rho & (a) \\ \left(\dfrac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx \dfrac{8\pi G}{3c^2}\rho & (b) \end{cases} \tag{402}$$

et comme pendant la pédiode radiative on a $\rho R^4 = \text{Cte} = \rho_1 R_1^4$, la variation du facteur d'échelle en fonction du temps s'écrit

$$\frac{R}{R_1} = \left(\frac{32\pi G\rho_1}{3c^2}\right)^{1/4} t^{1/2} \tag{403}$$

d'où

$$\varepsilon = \chi(T) a T^4 = \frac{3c^2}{32\pi G} t^{-2} \tag{404}$$

et donc

$$t \propto \frac{1}{T^2} \tag{405}$$

En fait, on peut montrer que

$$t = \frac{0.143 \times 10^{14}}{T^2} \text{ ans} K^2 \tag{406}$$

Donc l'échelle de temps t_{weak} décroît beaucoup plus vite que l'échelle de temps de l'expansion. Le découplage se déroule lorque $t = t_{weak}$. Sachant que

$$\sigma_{weak} = 3 \times 10^{-9} \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \text{ m}^2 \tag{407}$$

on démontre que ce découplage se produit pour $kT = 1$ Mev. À cet instant on a alors

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{1.28\text{Mev}}{1.\text{Mev}}} \tag{408}$$

ce qui donne

$$\frac{n}{n+p} = 0.21 \tag{409}$$

Après le découplage, la fraction de neutrons ne décroît plus selon la loi (408) mais beaucoup plus lentement car il n'y a plus d'équilibre. C'est à cette époque que les neutrons libres vont donc pouvoir fusionner pour former les éléments légers. Tous les neutrons vont alors se combiner pour former des noyaux de ^{4}He. Les réactions de base sont les suivantes

$$p + n \rightleftharpoons d + \gamma \tag{410}$$

$$d + d \rightleftharpoons^3 \text{He} + n \tag{411}$$

$$^3\text{He} + n \rightleftharpoons 3^{\text{He}} + p \tag{412}$$

$$^3\text{He} + d \rightleftharpoons 4^{\text{He}} + n \tag{413}$$

L'abondance d'Hélium est caractérisée par la quantité

$$Y = \frac{m_{^4\text{He}}\ n_{^4\text{He}}}{m_H\ n_H + m_{^4\text{He}}\ n_{^4\text{He}}} \approx 0.25 \tag{414}$$

De la même façon se forment simultanément le Deuterium, l'Hélium 3 et le Lithium 7. Ces éléments, qui ne peuvent pas se former dans les étoiles, trouvent donc leur origine dans les phases précoces d'un univers chaud en expansion dont la température décroît progressivement. La prédiction de leur abondance est un très grand succès de la théorie de la nucléosynthèse primordiale.

11.4 Comparaison avec les observations

Voici en résumé les abondances mesurées

$$\begin{cases} {}^4\mathrm{He}: & 0.236 \leq Y \leq 0.254 \\ \dfrac{{}^7\mathrm{Li}}{\mathrm{H}}: & 1.1 \pm 0.4 \times 10^{-10} \\ \mathrm{D}: & 2\ 10^{-5} \leq D \leq 1.5 \times 10^{-4} \\ {}^3\mathrm{He}: & \dfrac{\mathrm{D} + {}^3\mathrm{He}}{\mathrm{H}} = 3.6 \pm 0.6 \times 10^{-5} \end{cases} \tag{415}$$

La Figure 73 montre le remarquable accord entre les observations et les prédictions théoriques.

11.5 Contrainte sur la fraction de baryons

La fraction de baryons peut s'exprimer sous la forme

$$\Omega_B = 0.0035\ \eta_{10} h^{-2} \left(\frac{T}{2.7}\right)^3 \tag{416}$$

où

$$\eta_{10} = 10^{10}\ \frac{n_B}{n_\gamma} \tag{417}$$

Par ailleurs, on peut montrer que l'abondance en Hélium peut se mettre sous la forme

$$Y = 0.261 - 0.018 \log\left[10^5 \frac{n_{\mathrm{D}} + n_{{}^3\mathrm{He}}}{\mathrm{H}}\right] + 0.014\,[N_\nu - 3] + 0.014\,\left[\tau_{1/2} - 10.6\right] \tag{418}$$

où $\tau_{1/2}$ est la durée de vie du neutron en minute, N_ν est le nombre d'espèces de neutrinos (d'après les expériences du LEP, il n'en existe que 3).
η_{10} est contraint par les observations, notamment le ^{7}Li mesuré dans les étoiles de faible métallicité. Avec les mesures actuelles nous avons finalement les limites suivantes

$$1.2 \leq \eta_{10} \leq 6.4 \tag{419}$$

$$0.0040 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.025 \tag{420}$$

Si l'on considère l'intervalle le plus compatible avec l'abondance des éléments légers, $\eta_{10} = 4.1$, alors,

$$\Omega_B h^2 = 0.015 \tag{421}$$

et dans ce cas

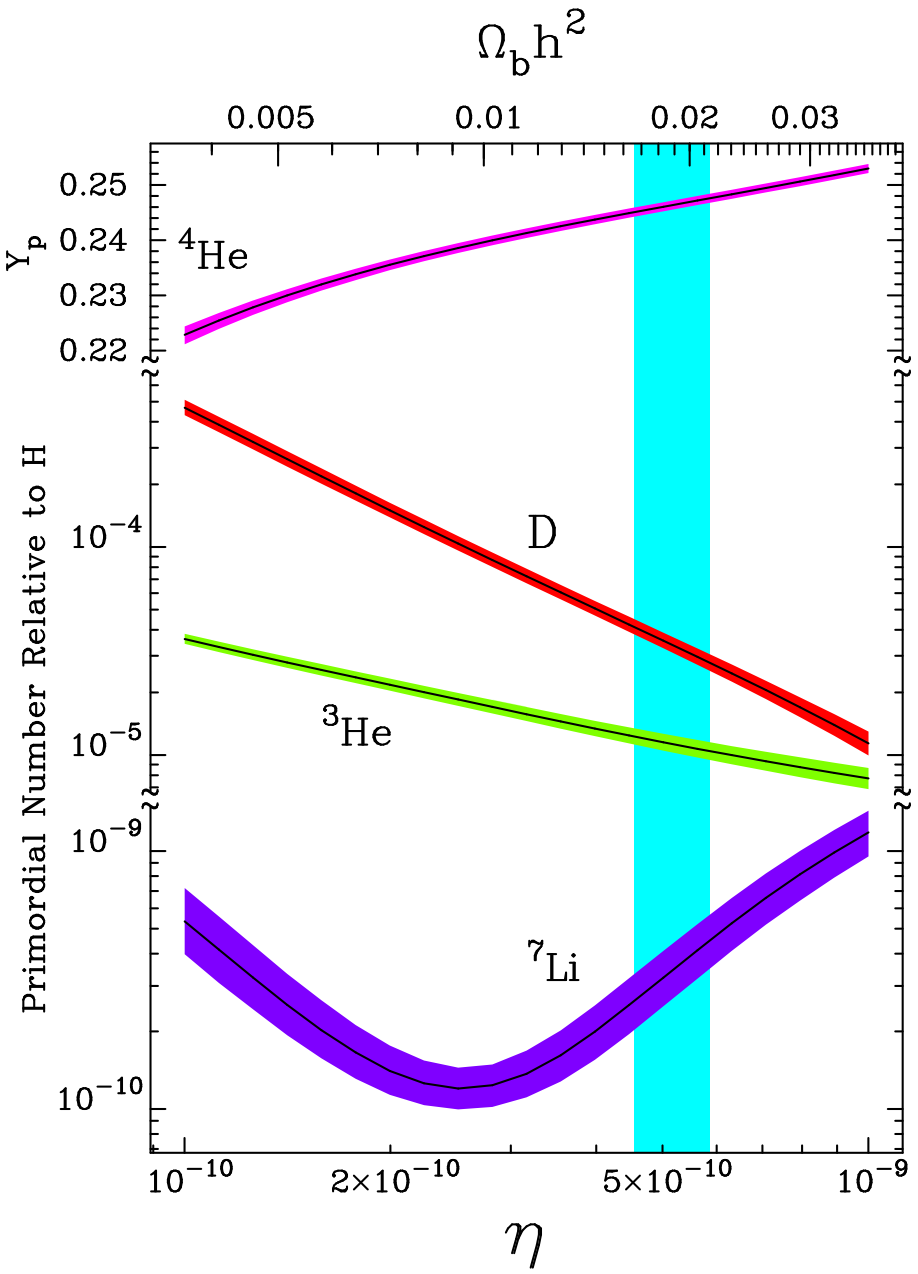

Figure 73.: *Abondance des éléments légers prédite par la nucléosynthèse primordiale en fonction du rapport baryon sur photon (en bas) ou de la fraction de baryon (en haut). La bande verticale trace l'intervalle permis par les observations.*

1. Comme $\Omega_{lumineux} = \Omega_{galaxie} + \Omega_{gaz} = 0.007$, il doit exister des baryons non lumineux.
2. Comme $\Omega > 0.1$, il doit exister de la matière non baryonique.

12. Les nouveaux instruments de la cosmologie

L'objectif de cette section est de présenter un panorama des moyens observationnels et des outils dont dispose la cosmologie physique pour aborder les grandes questions de la cosmologie future. J'espère qu'il permettra aux étudiants de voir plus clair dans cette myriade de projets et éventuellement d'y discerner des objectifs qui pourraient les motiver.
Il est important avant toute chose de rappeler les grandes questions et/ou énigmes de la cosmologie :

1. les tests des théories de la gravitation,
2. la topologie de l'univers,
3. les paramètres cosmologiques,
4. la nature de la matière noire,
5. la recherche de signatures des défauts topologiques,
6. les contraintes sur les modèles inflationnaires,
7. l'origine du spectre de fluctuation,
8. la quantité et la distribution de la matière noire à très grande échelle,
9. la description de la structuration de l'univers,
10. la formation des amas et l'évolution de l'abondance des amas de galaxies,
11. la(es) relation(s) entre la lumière et la matière ; évaluation du facteur de biais : comment dépend-il du temps, de la densité locale, du type de galaxie ? Est-ce une relation linéaire ?
12. la formation des halos (le *Dark Age*),
13. origine de la re-ionisation de l'univers,
14. lien entre quasars, AGNs et galaxies,
15. les premières étoiles et l'histoire de la formation stellaire dans les galaxies,
16. l'origine des types morphologiques des galaxies,
17. la distribution et les mécanismes de formation des nuages de la forêt Lyman-α,
18. lien entre systèmes amortis et les premières galaxies : histoire du gaz,

19. les fluctuations du fond diffus, des très grandes aux toutes petites échelles,
20. la masse et la distribution des composantes de la matière dans les amas de galaxies : SZ/X/Lentille gravitationnelle.

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons des témoins : les photons, les neutrinos, les ondes gravitationnelles (projets VIRGO et LIGO). Pour piéger ces témoins nous construisons d'immenses collecteurs : les télescopes et les antennes au sol, dans la haute atmosphère et dans l'espace, les collecteurs de neutrinos et d'ondes gravitationnelles, les accélérateurs de particules, les télescopes gravitationnels. Pour analyser ces témoins nous construisons des instruments : les photomètres, les caméras bidimensionnelles, les spectrographes, les polarimètres, les bolomètres. Enfin, pour déterminer ce que nous devons chercher, comment nous devons nous y prendre, et comment interpréter les données nous nous référons aux recherches théoriques, et faisons appel aux modélisations et aux simulations numériques.

Table 5.: *Un court résumé des instruments d'intérêt cosmologique qui seront disponibles d'ici 10 ans. Ce n'est pas une liste exhaustive. Je mentionne simplement les instruments qui ont une véritable vocation à répondre à certaines des questions de la cosmologie.*

Question	Expérience	Instrument	Dates
• Nature de la matière noire	Edelweiss,CDMS, GENIUS	Bolomètres	1999
• Analyse des neutrinos	AMANDA, ANTARES	-	2000-2010
• Évolution des galaxies	VLT, 10-m	FORS/ISAAC	1999-2003
		/SINFONI/FLAMES	1999-2003
	AAT/Apache Point	2dF/SDSS	1999-2003
• Formation des galaxies	ALMA, NGST	-	2007-2010
• Paramètres cosmologiques	Exp. ballons, CFHT	MEGACAM	2000-2005
	MAP,	-	2004-2007
	Planck Surveyor		
• Évolution de la structuration des galaxies	VLT, GEMINI	VIRMOS, DEIMOS	2001-2003
• Fluctuations du fond diffus aux petites échelles	Planck Surveyor	-	2007
• Distribution de la matière noire à grande échelle	CFHT	MEGACAM	2001
• Topologie de l'univers	Planck Surveyor	-	2007
• Formation, évolution des amas de galaxies	CHANDRA /XMM/GMRT(?)	-	1999-2003
• Masse et évolution des amas de galaxies	XMM/CFHT/ /HST/NGST	CFH12K/MEGACAM	2000-2007
• Formation et structuration des nuages Lyman-α	VLT	UVES	2001
• Relation AGN/Galaxies	XMM,VLT	FORS/UVES	1999-2000
	AAT/Apache Point	2dF/SDSS	1999-2003
• Morphogénèse des galaxies	HST/NGST	-	2000-2007

13. Annexes

13.1 Annexe A : projection de la fonction de corrélation

Supposons que la fonction de corrélation à deux points ait la forme usuelle :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad . \tag{422}$$

On se propose de calculer la projection $\omega(\theta)$ et d'analyser son comportement pour des petits angles.
On rappelle que

$$\mathrm{d}P_{2D} = N^2 \left[1 + \omega(\theta)\right] \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \tag{423}$$

et

$$\mathrm{d}P_{3D} = n^2 \left[1 + \xi(r_{12})\right] \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 \ . \tag{424}$$

Si la fonction de sélection du relevé est $\Phi(r/D)$, la densité numérique par unité d'angle solide est[13]

$$N = \int_0^\infty r^2 n \ \Phi\left(\frac{r}{D}\right) \mathrm{d}r \tag{425}$$

$$= nD^3 \int_0^\infty y^2 \Phi(y) \, \mathrm{d}y \tag{426}$$

$$= nD^3 E \tag{427}$$

et la projection de $\mathrm{d}P_{3D}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}P_{2D} = n^2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}r_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) \left[1 + \xi(r_{12})\right] \mathrm{d}\Omega_2 \mathrm{d}r_2 \ . \tag{428}$$

En utilisant (423), (425) et (428) on obtient :

$$\begin{aligned} n^2 D^6 E^2 \left[1 + \omega(\theta)\right] \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \ &= n^2 \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) \mathrm{d}r_1 \times \\ &\int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) \left[1 + \xi(r_{12})\right] \mathrm{d}r_2 \end{aligned} \tag{429}$$

et donc :

$$\begin{aligned} N^2 \left[1 + \omega(\theta)\right] \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \ &= N^2 \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 + \\ &n^2 \mathrm{d}\Omega_1 \mathrm{d}\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) \mathrm{d}r_1 \ \int \xi(r_{12}) \, r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) \mathrm{d}r_2 \end{aligned} \tag{430}$$

---

[13] $\mathrm{d}S = r^2 \mathrm{d}\Omega \quad \mathrm{d}V = r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega$

soit :

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) \mathrm{d}r_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) \mathrm{d}r_2 \tag{431}$$

Dans l'hypothèse où θ est petit, alors

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta \approx (r_1 - r_2)^2 + r_1 r_2 \theta^2 \tag{432}$$

et on peut définir une nouvelle variable u telle que

$$r_2 - r_1 = u r_0; \quad \text{et par ailleurs } r_2 = r_1 = yD \ , \tag{433}$$

on a donc

$$r_2 \approx u r_0 + yD \ , \tag{434}$$

et, pour r_1 fixe

$$\mathrm{d}r_2 \approx r_0 \mathrm{d}u \ . \tag{435}$$

Dans ce cas, y est presque constant autour de $r_2 - r_1$ et donc :

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) \mathrm{d}r_1 \int \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] \ r_0 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) r_2^2 \tag{436}$$

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int y^4 \Phi(y)^2 \, D^5 \mathrm{d}y \int r_0 \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] \mathrm{d}u \tag{437}$$

Comme $N^2 = n^2 D^6 E^2$, on pose

$$x = \frac{u r_0}{yD\theta} \ , \tag{438}$$

d'où l'on déduit finalement

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^{\gamma} \ \frac{1}{E^2} \int y^{5-\gamma} \Phi(y)^2 \, \mathrm{d}y \int \left(1 + x^2\right)^{-\gamma/2} \mathrm{d}x \qquad (CQFD). \tag{439}$$

13.2 Annexe B : théorème du viriel

La méthode la plus simple pour déterminer une masse dynamique d'un système stellaire consiste à utiliser le théorème du viriel.
Considérons un système auto–gravitant composé de N masses ponctuelles dont les positions, vitesses et masses sont représentées respectivement par les quantités $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ et m_i. Le moment d'inertie du système est alors :

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i {\boldsymbol{r}_i}^2. \tag{440}$$

Par conséquent :

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i.\boldsymbol{v}_i, \tag{441}$$

et

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{v}_i{}^2 + \boldsymbol{r}_i.\ddot{\boldsymbol{r}}_i). \tag{442}$$

Puisque le système est auto–gravitant, l'accélération d'une particule i est la somme des interactions gravitationnelles de chacune des particules :

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3}. \tag{443}$$

Le terme en $\boldsymbol{v}_i{}^2$ est associé à l'énergie cinétique totale K du système autogravitant, de sorte que :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2\ K + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\boldsymbol{r}_i.(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3}. \tag{444}$$

On peut exprimer le second terme plus simplement avec $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r}_j$:

$$\sum_{j \neq i} \frac{\boldsymbol{r}_i.(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j).(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3} + \sum_{j \neq i} \frac{\boldsymbol{r}_j.(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3}, \tag{445}$$

d'où :

$$\sum_{j \neq i} \frac{\boldsymbol{r}_i.(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3} = -\sum_{j \neq i} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} + \sum_{j \neq i} \frac{\boldsymbol{r}_j.(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^3}, \tag{446}$$

On transfère le second terme de droite à gauche, puis on y intervertit les indices. Les deux termes de gauche sont alors identiques, d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2\ K - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq 1} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \ = \ 2\ K + W. \tag{447}$$

Cette quantité est quelquefois appelée le Viriel, $K + W$ représentant l'énergie totale du système autogravitant.
Dans l'hypothèse où le système est stationnaire, on peut admettre que sur plusieurs fois l'échelle de temps dynamique caractérisant le système, la moyenne temporelle de $\ddot{I}$ est nulle. L'échelle de temps dynamique est le temps typique qu'il faut à une particule pour traverser l'ensemble du système auquel elle est associée. Ce n'est généralement pas une quantité observable puisqu'en pratique l'astronome n'observe un système qu'une

seule fois et/ou pendant une courte période. L'utilisation du théorème du viriel pour les galaxies n'est donc pas rigoureuse, mais on admet néanmoins que pour les systèmes observés on a :

$$2\ K\ +\ W \approx 0. \tag{448}$$

En d'autres termes, il est implicitement admis que les systèmes sont à l'équilibre et dans un état stationnaire. Ceci n'est vrai que lorsque l'échelle de temps dynamique du système est beaucoup plus courte que son âge au moment de l'observation.
En résumé on a donc :

- Système lié : $E_{totale} \leq 0 \ \Leftrightarrow \ K + W \leq 0.$
- Système Stationnaire : $2K + W = 0.$

13.3 Annexe C : la sphère isotherme singulière

Considérons une sphère de gaz isotherme en équilibre hydrostatique. L'équation d'équilibre peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dp}{dr} \ = \ \frac{kT}{m}\frac{d\rho}{dr} = -\rho\frac{GM(r)}{r^2}, \tag{449}$$

où p et T sont la pression et la température du gaz, m la masse des particules individuelles, k la constante de Boltzmann, ρ la densité du gaz et enfin $M(r)$ la masse de gaz contenue dans une sphère de rayon r.
Sachant que $dM(r)/dr \ = 4\pi r^2\rho$, si on multiplie les deux membres de l'équation précédente par r^2 et si on différentie ensuite, on obtient :

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\ln\rho}{dr}) \ = \ -\frac{Gm}{kT}4\pi r^2\rho. \tag{450}$$

Supposons maintenant que nous observons un système dynamique dont la fonction de distribution ait la forme suivante :

$$f(E) \ = \ \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\exp\Big(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\Big). \tag{451}$$

E est en fait l'énergie totale changée de signe.
La densité est obtenue en sommant sur l'espace des vitesses :

$$\rho \ = \ \int f(E)d^3\vec{v} \ = \ \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\ e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{\sigma^2}}4\pi v^2 dv. \tag{452}$$

Donc :

$$\rho \ = \ \rho_1 e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}} \ \text{ ou } \ \Psi \ = \ \sigma^2\ln\frac{\rho}{\rho_1}. \tag{453}$$

Pour ce système l'équation de Poisson s'écrit alors :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Psi}{dr}) \;=\; -4\pi G\rho. \tag{454}$$

Compte tenu de l'expression précédente de Ψ, on a :

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\ln\rho}{dr}) \;=\; -\frac{4\pi G}{\sigma^2}r^2\rho. \tag{455}$$

L'expression en fonction de Ψ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Psi}{dr}) \;=\; -4\pi G\rho_1 r^2 \exp\left[\frac{\Psi}{\sigma^2}\right]. \tag{456}$$

La comparaison des équations (450) et (456) montre qu'elles sont identiques si on pose :

$$\sigma^2 \;=\; \frac{kT}{m}, \tag{457}$$

où σ est la dispersion de vitesse sur une dimension.
Par conséquent *une sphère de gaz auto–gravitante est identique à un système d'étoiles sans collisions dont la fonction de distribution est donnée par l'expression (451)*, soit :

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left[\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}\right] \tag{458}$$

Cette distribution est identique à celle d'un gaz isotherme à l'équilibre : la distribution de Maxwell-Boltzmann. Cependant, il ne faut absolument pas les confondre : la distribution d'un gaz isotherme donne une équipartition de l'énergie par particule. Mais dans notre cas, le système étant sans collisions il ne peut y avoir équipartition par particule. Ce que nous donne la fonction de distribution, c'est l'énergie par unité de masse. On peut se demander comment un système sans collisions a pu parvenir à un tel état dynamique. En fait, il résulte d'une étape transitoire extrêmement rapide se déroulant après l'effondrement du système et que l'on appelle relaxation violente. Cette phase explique aussi pourquoi des systèmes sans collisions ont pourtant tous globalement la même morphologie.
On peut trouver facilement une solution à l'équation (456) en recherchant les solutions du type $\rho = Cr^{-\alpha}$. On a alors nécessairement :

$$\alpha \;=\; \frac{4\pi G}{\sigma^2}Cr^{2-\alpha}. \tag{459}$$

D'où :

$$\alpha = 2 \quad \text{et} \quad C = \frac{\sigma^2}{2\pi G}, \tag{460}$$

ce qui conduit au profil qui caractérise la sphère isotherme singulière :

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}. \tag{461}$$

Cette solution est appelée *Sphère Isotherme Singulière.*
Bien qu'extrêmement simple, la sphère isotherme singulière a l'inconvénient d'avoir une densité infinie en $r = 0$. Pour obtenir un comportement plus réaliste on définit de nouvelles variables sans dimension $\tilde{r}$ et $\tilde{\rho}$ telles que :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \tag{462}$$

où ρ_0 est la densité centrale et :

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G \rho_0}}. \tag{463}$$

r_0 est le *Rayon de King.* C'est le rayon pour lequel la densité projetée vaut environ la moitié de la densité centrale projetée. C'est pour cette raison que r_0 est fréquemment appelé le rayon de cœur par analogie avec le rayon de cœur qu'ont défini les modélisateurs.
La valeur de r_0 peut paraître arbitraire. En fait elle provient du théorème du Viriel : la vitesse quadratique moyenne des particules d'une sphère isotherme est :

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^4 dv}{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^2 dv} = 3\sigma^2. \tag{464}$$

Le théorème du Viriel donne donc :

$$2K + W = 2m\frac{1}{2}(3\sigma^2) - \frac{GM(r)m}{r} = 0, \tag{465}$$

Les ordres de grandeur sont alors fixés par la masse contenue dans une sphère de rayon r_0 et de densité ρ_0 :

$$M(r_0) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0, \tag{466}$$

la relation entre σ et $M(r_0)$ fixe alors r_0 :

$$3\sigma^2 = \frac{4G}{3r_0}\pi \rho_0 r_0^3. \tag{467}$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation (456) s'écrit :

$$\frac{d}{d\tilde{r}}(\tilde{r}^2\frac{d\ln\tilde{\rho}}{d\tilde{r}}) \;=\; -9\tilde{r}^2\tilde{\rho}, \tag{468}$$

ρ_0 étant la densité centrale, on a donc dans ce cas :

$$\rho_1 \;=\; \rho_0 e^{-\frac{\Psi(0)}{\sigma^2}}. \tag{469}$$

D'autre part, la relation entre Ψ et ρ impose que :

$$\frac{d\ln\rho}{dr} \;=\; \frac{d\,(\Psi/\sigma^2)}{dr}. \tag{470}$$

On a donc :

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left[\tilde{r}^2\frac{(d\Psi/\sigma^2)}{d\tilde{r}}\right] \;=\; -4\pi G\rho_0 r_0^2 \exp\left[\frac{\Psi(r)-\Psi(0)}{\sigma^2}\right]. \tag{471}$$

La détermination de $\tilde{\rho}$ s'obtient par intégration numérique de l'équation (471) et des conditions aux limites réalistes, comme $\tilde{\rho}(0) = 1$ et $(d\tilde{\rho}/d\tilde{r}) = 0$. La solution numérique montre que pour $\tilde{r}$ suffisamment grand, $\tilde{\rho}$ décroît comme $\tilde{r}^{-2}$ et s'approche donc du modèle à sphère isotherme singulière. On peut alors évaluer le comportement de la densité projetée loin du centre (en pratique quelques rayons de cœur) :

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad \text{et} \quad \Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(r)dz, \tag{472}$$

où z est l'axe perpendiculaire au rayon projeté, R le rayon projeté et $\Sigma(R)$ la densité projetée au rayon R.
Comme $r^2 = R^2 + z^2$, et pour des raisons de symétrie, on peut écrire :

$$\Sigma(R) = 2\int_R^{+\infty}\rho(r).\frac{r\;dr}{\sqrt{r^2-R^2}}. \tag{473}$$

Compte tenu de l'expression de $\rho(r)$, on a :

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{\pi G}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-R^2}}. \tag{474}$$

L'intégration admet une solution analytique en posant $r = R/\cos w$, et on obtient finalement la densité projetée de la sphère isotherme singulière :

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{2GR} = \frac{2}{9}\pi\rho_0 r_0(\frac{r_0}{R}). \tag{475}$$

Lorsque l'on s'approche du centre, le profil de densité de la sphère isotherme est bien représenté par une *loi de Hubble modifiée* :

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) \approx \tilde{\rho}_H(\tilde{r}) = \frac{1}{(1+\tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{476}$$

La densité projetée est alors obtenue en intégrant le long de la ligne de visée, z :

$$\Sigma(\tilde{R}) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+\tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1+\tilde{R}^2+\tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{477}$$

Soit :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{(1+\tilde{R}^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1+\frac{\tilde{z}^2}{1+\tilde{R}^2})^{\frac{3}{2}}}. \tag{478}$$

L'intégration se fait par deux changements de variables consécutifs :

$$u = \frac{\tilde{z}}{\sqrt{1+\tilde{R}^2}}; \quad \text{puis : } u = \mathrm{sh}t. \tag{479}$$

On obtient alors :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1+\tilde{R}^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \frac{2}{1+\tilde{R}^2}\Big[\mathrm{th}t\Big]_0^{+\infty}, \tag{480}$$

La densité projetée a donc une expression simple :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1+\tilde{R}^2}, \tag{481}$$

où $\tilde{R} = R/r_0$.

À grand rayon, la loi de Hubble modifiée décroît comme $\tilde{r}^{-3}$ et n'est donc pas une bonne approximation d'un profil isotherme. Néanmoins, la densité projetée issue de la loi de Hubble modifiée ajuste remarquablement les profils de brillance de surface des galaxies elliptiques à grand rayon, alors qu'elle n'ajuste pas leur profil à petit rayon. On arrive donc à une situation un peu paradoxale, où $\tilde{\rho}_H$ est une expression simple des régions internes des sphères isothermes et des régions externes des galaxies, mais ne peut être utilisée pour les zones externes des sphères isothermes ou les zones internes des galaxies.

Enfin, la sphère isotherme présente l'inconvénient de conduire à des masses totales infinies. Par conséquent, en dépit de son attrait par les expressions simples qu'elle prédit, la sphère isotherme n'est certainement

pas un modèle réaliste au-delà d'une zone limitée. C'est ce qui a par la suite conduit à l'introduction des fonctions de distribution de King et Michie qui définissent un rayon de troncature. Dans la pratique, on définit un rayon de troncature qui correspond à la distance radiale à partir de laquelle la densité du fond de ciel noie totalement l'énergie reçue de l'objet observé. Dans ce cas, il est probable qu'une partie du profil de l'objet correspondant aux zones les plus externes n'est plus accessible, mais on admet que la région noyée dans le fond de ciel reste limitée et n'affecte pas fondamentalement le profil restitué par les régions internes où le ciel n'est plus dominant.

13.4 Annexe D : Angle de déflexion et densité de matière

Dans l'approximation des champs faibles, la métrique est définie par

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \mathrm{d}l^2 \ . \tag{482}$$

Pour un photon $\mathrm{d}s^2 = 0$ est donc

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{c} \left(\frac{1 - \frac{2\Phi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \right)^{1/2} \mathrm{d}l \ \approx \ \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \mathrm{d}l \ . \tag{483}$$

La figure 74 décrit la configuration et le système de coordonnées. On a donc $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.
Le principe de Fermat nous dit que les chemins empruntés par les photons sont ceux pour lesquels le temps écoulé sera un extremum. Le temps écoulé est immédiatement donné par l'équation (483) et les chemins peuvent donc être déterminés en calculant ceux qui seront stationnaires par rapport à une petite variation δt. Comme

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \mathrm{d}l \tag{484}$$

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} \mathrm{d}z \ . \tag{485}$$

Remarquons tout d'abord que l'équation (484) est formellement identique à celle correspondant à la propagation du faisceau dans un milieu d'indice

$$n = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \ . \tag{486}$$

Par ailleurs, on peut, sans perdre en généralité, faire varier simplement t suivant la coordonnée $x(z)$. On a alors

$$c\delta t = \int \frac{\partial n}{\partial x}\delta x \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \mathrm{d}z \tag{487}$$

$$+ \int n\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \tag{488}$$

dont le second terme peut être intégré par parties et s'écrit donc :

$$\left[\delta x \;\; n\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right]_S^O - \int \mathrm{d}z\;\delta x\;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{n\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}. \tag{489}$$

Le premier terme de droite de l'équation (453) est nul car la variation de δx en $S = source$ et en $O = observateur$ est évidemment nulle. Par conséquent :

$$c\delta t = \int \mathrm{d}z\;\delta x \times \left\{\frac{\partial n}{\partial x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{1/2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[n\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right]\right\}. \tag{490}$$

Or $\delta t = 0$ quel que soit le chemin considéré. Comme δx est maintenant en facteur dans l'intégrant, $\delta t = 0$ pour tout δx si le terme multiplicatif associé à δx est nul pour tout z. Par conséquent

$$\frac{\partial n}{\partial x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{1/2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[n\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right]. \tag{491}$$

Que l'on peut intégrer :

$$\int \mathrm{d}z\;\frac{\partial n}{\partial x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{1/2} = \int \mathrm{d}\left[n\;\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right]. \tag{492}$$

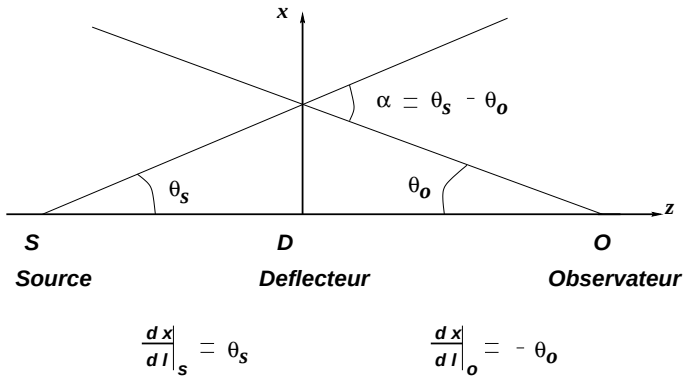

Figure 74.: *Configuration du "banc d'optique gravitationnel".*

c'est à dire

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} \mathrm{d}l = \int_S^O \mathrm{d}\left[n \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \right] . \tag{493}$$

Le terme de droite est assez clair. Aux bornes S et O le champ du déflecteur est nul est donc $n = 1$. On a donc

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} \mathrm{d}l = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \right)_S - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \right)_O . \tag{494}$$

Et dans ce cas, les deux termes de droites sont respectivement les deux angles θ_S et $-\theta_O$ projetés sur le plan (x, z). Leur différence est donc exactement l'angle de déflexion α projeté sur ce plan. De la même façon on peut déterminer l'angle projeté sur le plan (y, z). La somme des deux donne donc $\boldsymbol{\alpha}$. Pour les mêmes raisons, le terme de droite généralisé aux deux plans (x, z) et (y, z) s'exprime donc en fonction du gradient de n le long des axes perpendiculaires à z. On obtient donc la loi générale

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_S^O \boldsymbol{\nabla}_\perp n \ \mathrm{d}l . \tag{495}$$

Soit, compte tenu de la relation entre n et Φ :

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2}{c^2} \int_S^O \boldsymbol{\nabla}_\perp \Phi \ \mathrm{d}l . \tag{496}$$

La force gravitationnelle engendrée par le champ de matière de la lentille est

$$\boldsymbol{F} = G \int \frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|^3} \rho(\boldsymbol{x}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' . \tag{497}$$

On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(\boldsymbol{x})$ par

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -G \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \ , \tag{498}$$

tel que

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \ , \tag{499}$$

et où le gradient est tel que

$$-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \right) = \frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|^3} \ . \tag{500}$$

On peut donc effectuer la substitution dans l'équation (496) pour exprimer l'angle de déflexion en fonction du champ de densité de matière :

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int_S^O \mathrm{d}l \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \ \boldsymbol{\nabla}_{\perp \boldsymbol{x}} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \tag{501}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int \rho(\boldsymbol{x}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \int_S^O \frac{(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})_\perp}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|^3} \, \mathrm{d}l \tag{502}$$

13.5 Annexe E : notions sur les tenseurs

Avant tout, je rappelle que la *convention d'Einstein* consiste à simplifier l'utilisation des symboles dans les sommes portant sur des indices qui sont répétés une fois en haut et une fois en bas des quantités sommées.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B^i = A_i B^i \ . \tag{503}$$

En particulier cette convention est adoptée pour $\mathrm{d}s^2$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \ . \tag{504}$$

Vecteurs contravariants. Supposons que l'on décrive une trajectoire par une courbe paramétrée sous la forme $x^i = x^i(\lambda)$. La direction de la tangente à cette courbe est déterminée par le vecteur A^i tel que

$$A^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \ . \tag{505}$$

Mais la tangente à une courbe est un invariant ; elle ne dépend pas du système de coordonnées, même si ses composantes dans un autre système

sont différentes. Supposons donc que dans un nouveau système de coordonnées x'^i, les nouvelles composantes du vecteur représentant la direction de la tangente soient

$$A'^i = \frac{dx'^i}{d\lambda} \ . \tag{506}$$

Sachant que $x^i = x^i(x'^k)$ et $x'^k = x'^k(x^i)$, on établit immédiatement que

$$A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}A^i \ , \tag{507}$$

où nous avons adopté la convention d'Einstein.
L'équation (507) est la loi de transformation générale de tous vecteurs de type A^i. Les quantités qui se transforment selon cette loi sont appelées des *vecteurs contravariants*.

Vecteurs covariants. Soit $\Phi(x^k)$ une fonction scalaire. L'équation $\Phi(x^k) = C^{te}$ décrit une hypersurface dont la normale est définie par les 4-vecteurs

$$B_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \ . \tag{508}$$

La normale à l'hypersurface est aussi une quantité indépendante du système de coordonnées. De la même façon, ses nouvelles composantes dans un nouveau système peuvent s'écrire

$$B'_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} \ , \tag{509}$$

avec

$$B'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}B_i \ . \tag{510}$$

Les quantités dont les lois de transformation sont selon l'équation (510) sont appelées *vecteurs covariants*.

Tenseurs

Définition Par définition, un *tenseur contravariant* de rang 2 est un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}T^{mn} \tag{511}$$

(on adopte toujours la convention d'Einstein).
Un *tenseur covariant* de rang 2 est un un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}T_{mn} \ . \tag{512}$$

Enfin, un *tenseur mixte* de rang 2 est un un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'^{i}_{k} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{k}} T^{m}_{n} \ . \tag{513}$$

Les tenseurs généralisent les concepts de scalaires et de vecteurs. En fait, les scalaires, les vecteurs et les tenseurs sont les seules quantités avec lesquels on peut définir des invariants par changement de systèmes de coordonnées. Il était donc naturel qu'Einstein tente d'exprimer les équations reliant la courbure à la matière-énergie sous forme tensorielle. La difficulté des tenseurs est surtout dans le fait que contrairement aux scalaires et aux vecteurs, nous n'avons pas de moyens de nous les représenter.

Exemple : tenseur métrique
Les g_{ik} sont effectivement les composantes d'un tenseur. En effet,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{514}$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} dx'^m \right) \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} dx'^n \right) \tag{515}$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = \left(g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \right) dx'^m dx'^n \tag{516}$$

et donc

$$g_{ik} dx^i dx^k = g'_{mn} dx'^m dx'^n \tag{517}$$

qui est bien la loi de transformation d'un tenseur.

Un tenseur satisfaisant $T_{ik} = T_{ki}$ est dit symétrique. Inversement, un tenseur satisfaisant $T_{ik} = -T_{ki}$ est dit antisymétrique. Le tenseur métrique est symétrique.

Contraction des tenseurs La contraction est une opération de réduction du rang d'un tenseur. Elle s'effectue en identifiant un indice supérieur d'une composante avec un indice inférieur d'une autre composante. Par exemple

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \tag{518}$$

est un scalaire obtenu par contraction d'un vecteur. Il est construit par association des composantes de même indice.
Par la même procédure on peut abaisser ou monter un indice :

$$A_i = g_{ik} A^k \quad \text{ou} \quad A^i = g^{ik} A_k \ . \tag{519}$$

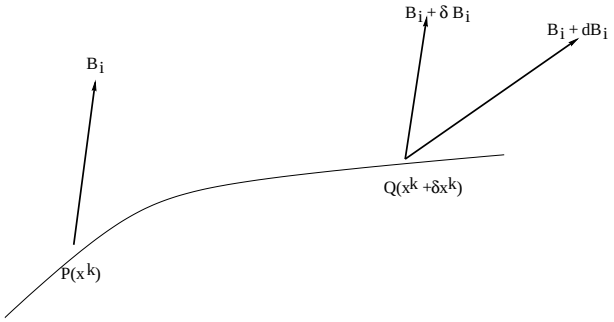

Figure 75.: *Illustration de la signification de la dérivée covariante. Le vecteur B au point P évolue vers le vecteur $B + dB$ au point Q. Pour établir la variation de B il faut tenir compte du déplacement de B et donc, il faut transporter d'abord B au point Q et l'évaluer à cette position. C'est précisément ce que donne $B + \delta B$.*

Dérivée covariante Soit un champ de vecteurs quelconque $B_i(x^k)$ covariant. Ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial B'_k}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^n}{\partial x'^m}\frac{\partial B_i}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^k} B_i \ . \tag{520}$$

Dans le cas le plus général le second membre de la partie droite de cette transformation n'est pas nul. Donc, la dérivée partielle d'un tenseur covariant n'est pas un tenseur. Cette situation est illustrée sur la Figure 75. P et Q sont deux points voisins de coordonnées (x^k) et $(x^k + \delta x^k)$ où le vecteur B vaut respectivement B et $B + dB$. Mais pour calculer la variation de B de P à Q il faut évaluer la variation de B au même point. Pour cela on effectue un *transport parallèle* des composantes B_i de P vers Q. Les composantes y prennent les valeurs $B_i + \delta B_i$. La différence entre $B(x^k + \delta x^k)$ et B transporté par transport parallèle est un vecteur au point Q. Par conséquent, *si* on sait comment B est modifié pendant le transport parallèle, alors on peut définir la différentiation du vecteur. On exprime ce changement par une relation de la forme

$$\delta B_i = \Gamma^l_{ik} B_l \delta x^k \ , \tag{521}$$

où les Γ^l_{ik} sont appelés les symboles de Christoffel. Il est important de noter que les Γ^l_{ik} sont des objets nouveaux qui s'ajoutent à la métrique. En effet, alors que la métrique définit comment mesurer des distances entre deux points, les Γ^l_{ik} définissent comment construire un vecteur parallèle en des points voisins (c'est plus génériquement une connexion affine).
On a donc :

$$B_i(x^k + \delta x^k) - [B_i(x^k) + \delta B_i] = B_i(x^k) + \delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - B_i(x^k) - \delta B_i \tag{522}$$

soit, par identification avec l'équation 521 :

$$\delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \delta B_i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l \right) \delta x^k \ . \tag{523}$$

On redéfinit alors la dérivée d'un vecteur par l'expression suivante :

$$B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l = B_{i,k} - \Gamma^l_{ik} B_l \ . \tag{524}$$

$B_{i;k}$ est appelé la *dérivée covariante d'un vecteur covariant*. Notez les symboles "j ;k" et "j,k" qui différencient les dérivées partielles et covariantes.
L'objectif de toute cette procédure est de définir un objet dont la variation se transforme comme un tenseur. On peut alors démontrer que, pour que $B_{i;k}$ se transforme comme un tenseur, il faut que les Γ^l_{ik} se transforment de la façon suivante :

$$\Gamma'^{\,i}_{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \Gamma^m_{np} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \partial x'^l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \ . \tag{525}$$

Dans le cas du tenseur métrique, on peut montrer que

$$g_{ik;\ l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^p_{il} g_{pk} - \Gamma^p_{kl} g_{ip} \tag{526}$$

Dans le cas particulier des géométries Riemanniennes (utilisées notamment par Einstein), on peut montrer que

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk} \quad \text{et} \quad g_{ik;l} = 0 \tag{527}$$

et dans ce cas, on peut déduire cette relation bien connue :

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \tag{528}$$

Différentielle covariante totale Par définition

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kl} A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k \right) dx^l \tag{529}$$

et

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} \right) dx^l \tag{530}$$

Cas d'un tenseur

$$D_l A^{ik} = \partial_l A^{ik} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im} \tag{531}$$

Cas d'un scalaire

$$D\Phi = d\Phi \quad ; \quad D_l \Phi = \partial_l \Phi \tag{532}$$

Tenseur de Riemann-Christoffel. Comme le montre la Figure 76, dans le cas le plus général d'une géométrie non-euclidienne, le résultat d'un transport parallèle dépend du chemin de transport. Une question intéressante est de trouver quelles conditions il faudrait sur le vecteur B_i pour que le résultat du transport parallèle soit indépendant du chemin ? Cela revient à trouver un vecteur tel que

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik} B_l \tag{533}$$

soit

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\Gamma^l_{ik} B_l\right) = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} B_l + \Gamma^l_{ik} \frac{\partial B_l}{\partial x^m} \tag{534}$$

On peut montrer que

$$\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} B_l + \Gamma^l_{ik} \frac{\partial B_l}{\partial x^m} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^n} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{ln}\right) B_m \tag{535}$$

et comme

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^n \partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^n} \tag{536}$$

La condition qu'un résultat de tranport parallèle soit indépendant du chemin est donc

$$R^m_{i\,kn} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{ln} - \Gamma^l_{in} \Gamma^m_{lk}\right) = 0 \tag{537}$$

Comme il faut que ce résultat soit indépendant du système de coordonnées, il faut que $R^m_{i\,kn}$ soit un tenseur. Ce n'est pas évident mais cela se démontre effectivement. $R^m_{i\,kn}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel. On peut dire que c'est ce tenseur qui spécifie les propriétés géométriques de l'espace-temps. On peut montrer qu'il s'exprime en fonction du tenseur métrique de la façon suivante :

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(g_{kl,im} + g_{im,kl} - g_{km,il} - g_{il,km}\right) \tag{538}$$

Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein. Le tenseur de Ricci est contruit par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel :

$$R_{ik} = g^{im} R_{iklm} = R^m_{klm} \tag{539}$$

qui est un tenseur symétrique.
Par contraction consécutive on construit ainsi la courbure scalaire R :

$$R = R_{kk} = R^k_k \ . \tag{540}$$

Le tenseur

$$G_{ik} = g^{kl} R_{kl} - \frac{1}{2} g_{ik} R \tag{541}$$

est le tenseur d'Einstein.

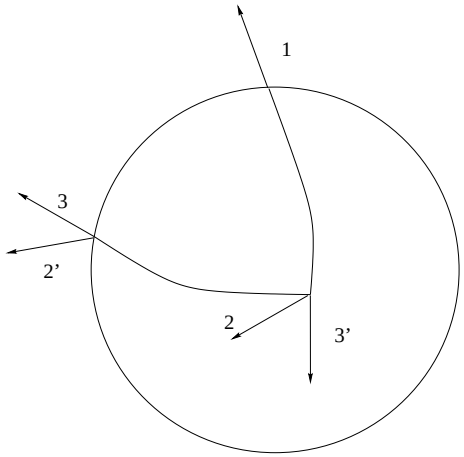

Figure 76.: *Dépendance du transport parallèle avec le chemin. Les chemins (1,2,3) et (1,2',3') déplacent un vecteur selon deux trajets différents. Le résultat est différent : la direction du vecteur n'est pas identique.*