Formation et évolution des galaxies
Ecole CNRS de Goutelas XXV (2002)
Edité par A. Lançon, D. Egret et J.-L. Halbwachs

Formation hiérarchique des galaxies : les concepts fondamentaux

Julien Devriendt[1] & Bruno Guiderdoni[2]

[1] *Department of Physics, University of Oxford*

[2] *Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS (Orateur)*

Abstract. The theory of hierarchical galaxy formation represents the best attempt so far to describe how galaxies form in the cosmological context of the hot Big Bang model. We hereafter introduce this theory with special emphasis on the tools that are useful for the experts in the study of low and high–redshift galaxies, and we refer the reader to more elaborated texts for the details of the theory of dark matter clustering. Structure formation is ruled by the gravitational amplification and non–dissipative collapse of the initial density fluctuations that were generated during inflation. We describe the linear theory of gravitational amplification, and give the simple theory of non–linear growth that is useful for the purpose of galaxy modelling : the so–called "top–hat" model, combined with either the peaks formalism or the extended Press–Schechter prescription. Then we show how information relevant for galaxy formation can also be extracted from numerical simulations. The processes that rule the fate of baryons in the dark matter potential wells are briefly reviewed : heating and cooling of the intergalactic gas, dissipative collapse, star formation, stellar evolution and feedback to the interstellar and intergalactic medium, merging. Finally, we rapidly discuss the three possible approaches to implementing hierarchical galaxy formation : the semi–analytic models, the "fully–numerical" (N–body + hydrodynamical simulations) approach and the so–called "hybrid" method that couples a numerical description of the dark matter dynamics to a semi-analytic modelling of the baryons. As an illustration that hierarchical galaxy formation seems to reproduce the main statistical properties of galaxies, we present a few results obtained by the latter method. This primer ends with conclusions on the successes and failures of the models, and highlights some perspectives for the developments in forthcoming years.

Table des matières

1 Introduction

Dans la quête scientifique des “origines”, les observations de galaxies lointaines constituent l’un des objectifs prioritaires des grands télescopes. En raison de la vitesse finie de propagation de la lumière, de telles observations permettent, en effet, de remonter le cours de l’évolution des galaxies, jusqu’à l’époque de leur formation[1]. La course aux objets de faible luminosité est d’abord motivée par la remontée dans le temps cosmique, remontée que l’on espère voir aboutir à l’époque de l’allumage des premières étoiles, probablement vers $z \sim 30$, lors de la sortie de l’“âge sombre” qui a suivi la recombinaison.

Parallèlement à cet effort observationnel, il faut élaborer un cadre théorique qui permette, à l’intérieur du modèle cosmologique standard du *Big Bang chaud*, d’interpréter les données existantes et de guider les stratégies d’acquisition à venir. Les théories de formation des galaxies élaborées depuis plusieurs décennies se regroupent en deux classes, connues sous les noms de “modèle monolithique” et de “modèle hiérarchique”. Cette introduction débute par un récapitulatif historique de l’évolution des indications observationnelles et des concepts théoriques, qui, au cours de ces dernières années, ont nourri la réflexion sur ce thème.

1.1 Du modèle monolithique...

Une rapide description du panorama observationnel et théorique qui prévalait il y a une quinzaine d’années permettra de mieux comprendre les enjeux de cette recherche. Il est bien connu que les populations de quasars optiques et de radiosources, plus importantes dans l’univers lointain, témoignent de l’évolution cosmologique. A la fin des années 1980, ces effets d’évolution commençaient aussi à être établis observationnellement pour les galaxies. On s’était d’abord aperçu que les amas de galaxies riches et denses à un décalage spectral $z \sim 0.4$ montrent une fraction de galaxies bleues nettement plus importante que celle des amas

[1] Pour fixer les idées, rappelons que, dans la cosmologie d’Einstein et de Sitter ($\Omega_0 = 1$, $\lambda_0 \equiv \Omega_\lambda = 0$), des décalage spectraux $z = 1$, 3 et 5 correspondent respectivement à des pourcentages de “temps de regard en arrière” (*look–back time*) de 65, 88 et 93 % dans le passé de l’univers. A cette dernière époque, l’univers n’avait que 0.9 milliard d’années (pour $h \equiv (H_0/100)$ km s^{-1} Mpc^{-1} $= 0.5$). Pour $\Omega_0 = 0.3$, $\lambda_0 = 0.7$, les décalages spectraux $z = 1$, 3 et 5 correspondent à des “temps de regard en arrière” de 57, 84 et 91 % dans le passé de l’univers. A cette dernière époque, l’univers n’avait que 1.3 milliard d’années (pour $h = 0.6$).

proches de même richesse et densité (effet Butcher-Oemler [1] [2]). A $z > 1$, la plupart des galaxies détectées alors étaient les contreparties optiques des radiogalaxies des catalogues 3C, 1 Jy, PKS, ou 4C, qui exhibaient des propriétés physiques spectaculaires, en particulier une forte émission de la raie Lyman α. Les galaxies les plus lointaines, comme 0902+34 à $z = 3.395$ [3], et 4C41.17 à $z = 3.8$ [4], appartenaient à cette catégorie. Néanmoins, la question de savoir dans quelle mesure elles étaient représentatives de la population des galaxies de champ dans leur ensemble demeurait ouverte. Quant aux observations directes de ces galaxies de champ, elles permettaient tout juste de se faire une idée sur la quantité d'évolution réellement présente. A la profondeur en magnitude apparente $B < 21.5$, l'évolution de cette population commençait à apparaître dans les premiers relevés en z [5]. Bien plus profond, à $B < 27$, les sondages les plus sensibles dévoilaient un nombre immense de galaxies faibles et bleues, dont la nature restait encore inconnue [6]. Enfin, ces relevés demeuraient exclusivement limités au domaine optique, les sondages profonds menés par le satellite IRAS dans l'infrarouge (IR) ne dépassant pas $z \sim 0.2$ [7]. En conséquence, il n'était pas question d'estimer la fraction de la formation d'étoiles cachée par la poussière à grand z. La quête aux *galaxies primordiales*, alors définies comme les progéniteurs des galaxies géantes de la séquence de Hubble actuelle, au moment où se forment les premières générations d'étoiles, demeurait toutefois infructueuse (voir, par exemple, la revue de Koo [8]).

Comment interpréter ces observations ? Le cadre théorique global le plus simple est celui du *modèle monolithique* dans lequel un nuage de gaz s'effondre en une échelle de temps t_{dyn}, et se transforme en étoiles en une échelle de temps t_*, les deux temps caractéristiques étant fixés par les conditions initiales [9]. C'est alors le rapport des échelles de temps qui conditionne la nature dissipative ou non–dissipative de l'effondrement gravitationnel et, en conséquence, la morphologie de la galaxie (respectivement, spirale ou elliptique). Les elliptiques géantes forment leurs étoiles plus rapidement que les spirales, et ont actuellement moins de gaz, et des populations stellaires plus âgées, avec des luminosités par unité de masse plus faibles et des couleurs plus rouges [10]. L'évolution de ces luminosités et couleurs peut alors être calculée à partir de nos connaissances sur les tracés d'évolution stellaire et les couleurs des étoiles [11], [12], [13]. Dans le modèle monolithique, les propriétés des galaxies sont fixées une fois pour toutes dès l'époque de formation, à un décalage spectral z_{for} où il faut donc chercher les galaxies primordiales.

Toutefois, à partir des années 1980, le modèle monolithique a dû faire face à des indications observationnelles toujours plus nombreuses qui montrent l'influence, peut-être prépondérante, de l'*environnement* sur l'évolution des galaxies. Il avait été reconnu très tôt, puis confirmé quantitativement par Dressler [14], que les fractions de galaxies elliptiques, lenticulaires et spirales sont des fonctions de la densité locale projetée de leur environnement (en galaxies Mpc^{-2}). Cette ségrégation morphologique est valable sur plusieurs ordres de grandeur de la densité projetée, dans le champ, les groupes et les amas, les galaxies elliptiques et lenticulaires se trouvant de préférence dans les régions denses. Une telle relation peut–elle s'interpréter dans le cadre du modèle monolithique en supposant que t_{dyn}/t_* croît avec la densité locale ? Ou bien est–ce l'indication que le type morphologique est acquis progressivement (ou brutalement) au cours d'une évolution conditionnée par l'environnement ? Comme le rappelait, par exemple, la revue de Dressler [15], l'étude attentive des galaxies révèle de nombreux signes d'interactions : cœurs multiples des galaxies cD situées au centre de certains groupes et amas, queues de marées et déformations diverses liées aux interactions gravitationnelles, coquilles et nuages de gaz adventices dans les galaxies elliptiques signalant un évènement de cannibalisme récent, voire balayage du gaz froid des disques par le gaz chaud des amas. Sans aucun doute, les galaxies géantes peuvent avaler des satellites, ou fusionner entre elles. Le produit de cette fusion est une galaxie avec une structure et des propriétés photométriques similaires à celles des elliptiques [16], [17]. Par ailleurs, le satellite IRAS avait attiré l'attention sur l'existence, dans l'univers local, de galaxies lumineuses et ultra–lumineuses dans l'IR (LIRGs avec $L_{IR} \geq 10^{11} L_\odot$, et ULIRGs avec $L_{IR} \geq 10^{12} L_\odot$), dont la luminosité très élevée provient sans doute de gigantesques sursauts de formation d'étoiles apparemment provoqués par des interactions et des fusions, et soumis à de fortes extinctions (voir la revue de Sanders & Mirabel [18]). Les galaxies de morphologie irrégulière, non celles de type Im mais les galaxies géantes qui apparaissent, par exemple, dans le catalogue de Arp, avaient été systématiquement écartées de la classification de Hubble comme étant des objets "hors norme" sans intérêt réel pour la compréhension des processus de formation des galaxies. Après le satellite IRAS, ces galaxies si lumineuses deviennent des objets–tests pour comprendre le déclenchement des flambées de formation d'étoiles.

1.2 … au modèle hiérarchique

Ces phénomènes sont–ils davantage que de simples accidents de parcours dans l'évolution des galaxies ? Quelles sont les parts de l'"inné" et de l'"acquis" ? *Galaxy evolution : Nature or nurture ?* En fait, on peut imaginer un *modèle hiérarchique* de formation dans lequel les galaxies se constituent progressivement par l'assemblage de structures de taille inférieure, des "blocs de base" (*building blocks*) ou "grumeaux" (*lumps*) d'étoiles et de gaz, et où les galaxies les plus grosses résultent de la fusion de galaxies plus petites. Ce sont alors les processus d'interaction et de fusion qui gouvernent complètement l'évolution, sans qu'un décalage spectral z_{for} unique puisse être associé de manière univoque à la formation.

La densité de l'univers est dominée par de la matière sombre, très probablement non–baryonique. Le modèle le plus attractif paraît être celui de la matière sombre froide (CDM pour *Cold Dark Matter*, [19]), dans lequel le spectre de puissance $P(k)$ des fluctuations primordiales, supposées adiabatiques et gaussiennes, peut être calculé.[2] Le calcul analytique permet de suivre la croissance linéaire des perturbations de densité, et les premières simulations numériques effectuées avec ce modèle, de prédire les propriétés statistiques des structures non–linéaires, ou *halos* de matière sombre qui se sont effondrés sous l'effet de la gravitation, et qui sont (plus ou moins) relaxés et virialisés [20], [21], [22]. La caractéristique principale de ce modèle est la *croissance hiérarchique* des structures, dite "de bas en haut" (ou *bottom–up*), dans laquelle les gros halos se forment plus tard, par la fusion de halos plus petits. Les plus grosses structures non–linéaires actuelles correspondent aux amas de galaxies, alors que les filaments, feuillets et superamas sont encore dans le mode de croissance linéaire, ou faiblement non–linéaire. Toutefois, les éléments de formalisme analytique, comme la théorie de Press et Schechter [23], ou la théorie des pics [24], étaient alors trop imparfaitement compris, et les simulations numériques avaient des résolutions trop limitées, pour permettre de reconstruire l'histoire de la croissance hiérarchique des halos de matière sombre autrement que de façon succincte.

Que deviennent, dans ce modèle, les baryons qui représentent une faible fraction de la masse, mais vont donner naissance aux galaxies ? A la fin des années 1980, différents travaux avaient repéré les principaux processus physiques qui guident leur évolution. La relaxation/virialisation du halo crée un potentiel moyen dans lequel le gaz de baryons chauffé par les chocs lors de l'effondrement gravitationnel peut refroidir radiativement [25], [26], [27]. La conservation du faible moment angulaire acquis par les perturbations du fait des interactions de marée avec leurs voisines fixe l'arrêt de l'effondrement radial du gaz, qui s'installe au centre du puits de potentiel sous la forme d'un disque en équilibre de rotation [28]. Si le critère de Toomre [29] est vérifié, les instabilités dans le disque déclenchent la formation d'étoiles. Ces étoiles vont évoluer. Les modèles d'évolution photométrique prévoient que les rapports masse (baryonique froide) sur luminosité varient alors sur plusieurs ordres de grandeur. L'énergie injectée par les supernovae réchauffe le gaz froid, provo-

---

[2] Il existe aussi des modèles de matière sombre froide avec des perturbations isocourbures (ICDM), et des modèles de matière sombre chaude (HDM) ou tiède (WDM). Ces autres modèles ont été moins étudiés que le CDM et ses variantes.

quant éventuellement un “dégazage” de la galaxie si la vitesse thermique dépasse la vitesse d'évasion [30]. Par ailleurs, les galaxies appartenant à des halos qui ont fusionné peuvent interagir gravitationnellement entre elles et avec le halo (relaxation lente par friction dynamique), puis fusionner selon des échelles de temps qui leur sont propres. Si les galaxies sont de masse très différentes, la fusion aboutit à la simple cannibalisation des étoiles et du gaz de la petite galaxie par la grosse. En revanche, si les galaxies sont de masse comparable, les simulations numériques montrent que la fusion produit un sursaut de formation d'étoiles qui consomme l'essentiel du gaz disponible, et le résultat de la fusion a un profil de densité et une dynamique resemblant à celle des galaxies sphéroïdales. Si le sphéroïde peut encore être un centre de refroidissement pour le gaz chaud du halo, un nouveau disque de gaz froid, puis d'étoiles, va se constituer autour de lui, et il deviendra alors le bulbe d'une nouvelle galaxie spirale. dans le cas contraire, le sphéroïde qui a épuisé tout son réservoir de gaz devient une galaxie elliptique. Différents travaux, comme ceux de White et Rees [31] ou Schaeffer et Silk [32], ont commencé à rassembler certains de ces éléments en un scénario cohérent. Depuis lors, différentes méthodes ont permis de placer cette théorie sur un socle plus solide. Nous reviendrons sur ces développements tout au long de ce cours. Mais auparavant, il convient de faire un bref bilan de quelques indications observationnelles plus récentes, qui semblent favoriser la scénario hiérarchique.

1.3 Des galaxies lointaines irrégulières . . .

Un bilan des observations de galaxies lointaines à la fin des années 1990 montre un contraste saisissant avec la situation qui prévalait dix années auparavant. Le sondage profond *Canada–France Redshift Survey* (CFRS) a donné la distribution en décalage spectral des galaxies à la magnitude $I_{AB} < 22.5$, jusqu'à $z \sim 1.3$, et permis d'en étudier les propriétés spectroscopiques ([33], et papiers suivants). Le Télescope spatial Hubble a produit le *Medium Deep Survey* [34], et surtout le relevé profond du *Hubble Deep Field* [35] dont la sensibilité et la résolution spatiale ont complètement renouvelé notre vision des galaxies lointaines. Les 3000 galaxies observées dans le champ de 5.3 arcmin^2 correspondent à environ 10^{11} galaxies dans l'univers observable. Les très grands télescopes Keck permettent maintenant de réunir de gros échantillons de galaxies à $z \sim 3$ et 4, grâce à la technique de sélection dite de la chute UV (*UV drop–out technique*, [36]). Des galaxies à émission Lyman α sont détectées au–delà de $z = 4$ [37], [38]. Les records en décalage spectral ne cessent de tomber : $z = 5.34$ [39], $z = 5.74$ [40], voire $z = 6.68$ [41] ! Le taux de formation d'étoiles cosmique reconstitué sur ces divers échantillons [42], [43], [44], [45], [46], est relativement constant à grand z, et montre une forte diminution entre $z = 1$ et $z = 0$. Cette histoire peut être mise en relation avec l'histoire du contenu en gaz froid [47], [48] et en éléments lourds [49] obtenue à partir des systèmes lorentziens en absorption sur la ligne de visée des quasars (*Damped Lyman–α Absorbers*). Les objets bleus de Tyson [6] se sont révélés être de petites galaxies avec des morphologies très irrégulières, qui évoquent les blocs de base à partir desquels les galaxies géantes de la séquence de Hubble pourraient se constituer [50], [51]. A $z = 3$ et 4, les galaxies à chute UV (Lyman Break Galaxies) sont bien différentes de celles de l'univers local, et leur nature fait encore l'objet de débats. A cette époque, les disques sont plus petits, mais, surtout, les elliptiques semblent absentes [52], [53], [54]. En revanche, à $z = 1$, disques et elliptiques comparables à ceux de la séquence de Hubble locale sont déjà présents, et l'activité de formation d'étoiles est en moyenne dix fois plus intense qu'à $z = 0$.

1.4 ... au rôle de l'extinction à grand redshift

Par ailleurs, l'émission IR et submillimétrique (submm) des poussières à grand z a été dévoilée de façon spectaculaire avec la détection du fond diffus cosmique infrarouge (FDIR) par les instruments FIRAS et DIRBE du satellite COBE [55], [56], [57], [58], [59], [60]. Ce FDIR est produit par l'accumulation de la lumière IR et submm produite par toutes les galaxies poussiéreuses le long de la ligne de visée. Alors que seulement 30 % de la luminosité bolométrique des galaxies locales est rayonnée par les poussières dans le domaine IR et submm [61], le fond diffus de COBE est dix fois plus intense que la prédiction sans évolution basée sur l'univers local observé par IRAS, et deux fois plus intense que le fond diffus optique obtenu en sommant les comptages de galaxies. Le rôle des poussières apparaît donc prépondérant dans le bilan de la luminosité émise par les galaxies lointaines. La source de chauffage des poussières semble bien être la formation d'étoiles, même si une contribution de noyaux actifs fortement éteints reste possible. Les galaxies qui contribuent au FDIR ont été vues dans les relevés profonds effectués à 15 μm par l'instrument ISOCAM [62], [63], [64], et à 175 μm par l'instrument ISOPHOT [65], [66], tous deux embarqués sur le satellite ISO. A partir du sol, l'instrument SCUBA monté au James Clerk Maxwell Telescope a également détecté cette population en observant à 850 μm [67], [68], [69], [70], [71]. L'identification optique et le suivi spectroscopique de ces sources IR et submm sont en cours [72], [73], [74]. Les premiers résultats des relevés semblent toutefois révéler, parmi les sources submm, l'équivalent à grand z des LIRGs et ULIRGs locales. Par ailleurs, une étude plus poussée des sources du CFRS, et des galaxies à chute UV détectées dans les échantillons des Télescopes Keck à $z = 3$ et 4, a montré que ces sources subissent une forte extinction, et que le taux de formation d'étoiles qui est estimé à partir de l'UV doit être multiplié par un facteur de 3 à 5 pour prendre en compte l'extinction interne [75], [46], [76]. Enfin, les poussières sont présentes à des décalages spectraux encore plus élevés, par exemple dans certains quasars à $z > 4$ [77] (voir aussi la revue par Hughes et collaborateurs [78]), dans un arc (galaxie magnifiée par effet de lentille gravitationnel) situé à $z = 4.92$ [79], et déjà dans une galaxie à émission Lyman α à $z = 5.34$ [80]. La découverte de nombreuses galaxies LIRGs et ULIRGs à grand redshift, en dépit des difficultés d'identification optique, semble montrer que le taux d'interaction et de merging était très élevé dans le passé, conformément à la prédiction qualitative du modèle hiérarchique. La cohérence quantitative de l'ensemble des indications observationnelles reste encore à établir.

1.5 Un changement de paradigme

En dix ans, nous avons aussi assisté à la naissance d'un champ nouveau : l'étude théorique de la formation hiérarchique des galaxies, dans le cadre explicite de la croissance hiérarchique des structures de matière sombre décrite dans le modèle cosmologique standard, avec un niveau de détail suffisant pour qu'elle soit contrainte par les observations *panchromatiques* des galaxies lointaines, c'est–à–dire à différentes longueurs d'onde, dans l'ultraviolet, l'optique, l'IR et le submm.

Il faut bien réaliser que le modèle hiérarchique implique un changement profond dans notre façon de percevoir (et de distinguer) la formation et l'évolution des galaxies, qui apparaissent désormais comme les deux côtés d'une même pièce. En effet, dans le modèle hiérarchique, la formation des galaxies n'est plus un processus se produisant à un redshift fixé, et suivi par une évolution dans laquelle l'influence de l'environnement n'agit qu'au second ordre ; c'est, au contraire, un processus qui débute très tôt dans l'histoire de l'univers, et se poursuit encore actuellement. C'est ainsi que notre Voie Lactée accrétera bientôt les deux nuages de Magellan, et devrait fusionner dans quelques milliards d'années avec M31, à l'intérieur du halo de matière sombre qui forme la structure abritant le groupe local. En conséquence, la notion de redshift de formation z_{for}, si utilisée dans les modèles de comptages de galaxies, devient ambiguë, et peut être définie de diverses façons. Pour la même raison, la définition de l'apparence observationnelle des "galaxies primordiales" est plus floue. A l'origine, il s'agissait de rechercher, à grand redshift, la signature observationnelle de la phase brillante initiale des galaxies géantes, en particulier des galaxies elliptiques. Cette phase brillante est demeurée indétectable, sans doute parce que les galaxies se construisent progressivement. Enfin, la notion même de classification morphologique, qui a occupé des générations d'astronomes et suscité des controverses bien connues (voir les désaccords de classification entre le RC2/RC3 et le RSA pour les galaxies locales, par exemple) n'apparaît plus aussi cruciale pour comprendre les processus de formation des galaxies. En effet, un morceau de matière (disons une étoile) va voyager, au cours de la croissance de la hiérarchie, dans des galaxies de type différent, situées dans des environnements différents.

L'intérêt du modèle hiérarchique est de fournir une explication séduisante aux corrélations entre les propriétés morphologiques et photométriques des galaxies. C'est en effet dans les régions les plus denses que les premières étoiles vont se former au sein des premières galaxies. Le taux d'interaction et de fusion y étant plus élevé, ces premières galaxies vont être de préférence incorporées dans des objets plus gros, de type sphéroïdal, lors de la croissance de la hiérarchie. Les sphéroïdes vont donc abriter, *in fine*, des populations stellaires en moyenne plus vieilles et plus rouges. Par ailleurs, le modèle hiérarchique explique aussi pourquoi ces corrélations sont "imparfaites". En effet, les objets se construisent selon des trajets évolutifs différents. Le modèle hiérarchique a donc pour ambition de prédire non seulement les corrélations *moyennes*, mais aussi leurs moments d'ordre supérieur (et en particulier, leur *dispersion*). Il permet ensuite de comprendre pourquoi il existe deux types morphologiques principaux, et deux seulement. Dans le cadre du scénario le plus simple, les disques se forment par effondrement dissipatif d'un gaz chaud en équilibre hydrostatique dans un halo de (faible) moment angulaire spécifique, alors que les sphéroïdes (bulbes et elliptiques) sont les produits des fusions. Enfin, le modèle hiérarchique articule les observations dans l'optique (la lumière des étoiles) et dans l'infrarouge lointain (la lumière des poussières) dans la mesure où les phases de fusion sont préférentiellement vues dans ce dernier domaine de longueurs d'ondes.

Pour conclure ce panorama, il faut encore rappeler que le modèle de formation hiérarchique des galaxies est davantage un cadre de travail cosmologique, ou un *paradigme*, qu'un modèle achevé. Il reste encore beaucoup à faire pour cerner et détailler les processus qui régissent le devenir des baryons dans la matière sombre. En conséquence, les succès et les échecs de tel ou tel modèle particulier doivent être considérés dans cette perspective de progrès de nos connaissances.

Ce cours a pour objectif de présenter les concepts fondamentaux de la théorie de la formation hiérarchique des galaxies, telles qu'ils interviennent dans les modèles. Il ne retient de la formation des structures de matière sombre que ce qui est strictement utile à son propos, et laisse délibérément de côté les simulations numériques de formation de galaxies individuelles, ou de rencontres entre deux galaxies. Le lecteur se référera utilement aux cours (e.g. Bernardeau [81]) ou aux ouvrages spécifiques de cosmologie (Peebles [82] et [83], Padmanabhan [84], Peacock [85]) qui traitent de la formation des structures. La section 2 présente la génération des fluctuations primordiales dans le contexte de l'inflation, et le spectre final après le découplage, qui va servir de conditions initiales pour la formation des structures. La section 3 indique comment croissent ces fluctuations linéaires dans le cas d'univers "dominés par la matière". La section 4 donne l'exemple très utilisé de la croissance non-linéaire d'une perturbation sphérique et homogène, encore appelé modèle du "chapeau haut–de–forme". Ce modèle a l'intérêt de permettre une description analytique complète des propriétés des halos, moyennant des hypothèses simplificatrices. La description statistique du nombre de halos formés est abordée dans la section 5. Les processus affectant les baryons sont décrits dans la section 6. La section 7 passe en revue les différentes approches possibles pour calculer l'effet de ces différents processus : semi-analytique, numérique, ou hybride. Quelques résultats sont proposés dans le cadre de l'approche hybride, à l'aide du code GalICS qui tourne à l'Institut d'Astrophysique de Paris. Enfin, la section 8 esquisse quelques conclusions (préliminaires !) et s'efforce de dégager les perspectives théoriques et observationnelles pour les années à venir.

2 Génération des fluctuations primordiales

2.1 La matière sombre

Selon le modèle du *Big Bang*, l'Univers a émergé d'un état initial singulier, de densité infinie, à partir duquel l'espace s'est étiré progressivement. Cette théorie est étayée par trois preuves observationnelles.
Tout d'abord, Hubble et Humason, ont montré [86], que les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse proportionnelle à la distance qui les sépare, caractéristique d'un Univers en expansion. D'autre part, la théorie de la nucléosynthèse primordiale, — qui découle naturellement de l'histoire thermique de l'Univers dans le cadre du *Big Bang* — prédit une abondance universelle d'hélium aussi importante que celle que l'on mesure (environ 25 % en masse) partout où cette mesure est possible. Finalement, le rayonnement de corps noir, qui baigne l'univers entier, et a été détecté par Penzias et Wilson [87], témoigne des densité et température élevées qui devaient régner dans l'univers primordial.

Mais l'extrême isotropie (à environ 1 pour cent mille) du rayonnement du fond de ciel micro–ondes (après soustraction du dipôle lié au mouvement de la Voie Lactée), soulève également des problèmes majeurs. Comment expliquer que des régions du ciel qui n'ont pas pu être en contact causal soient à la même température ? Et comment engendrer les galaxies qui peuplent l'univers actuel à partir de cette boule de feu cosmique désespérément lisse ? La réponse à ces deux questions cruciales se trouve sans doute dans la théorie de l'inflation, phase très brève de croissance exponentielle qu'aurait traversée l'Univers presque immédiatement après le *Big Bang*, et au cours de laquelle des fluctuations quantiques de densité auraient été amplifiées à des tailles macroscopiques, alors que l'univers observable conservait sa taille.

L'amplitude de ces fluctuations macroscopiques, au moment de l'émission du rayonnement de corps noir, est très faible (de l'ordre de 10^{-5}) quel que soit le mécanisme qui les a engendrées. En fait, une analyse détaillée des données recueillies par le satellite COBE semble exclure une formation des structures dominée par de la matière baryonique. En effet, le laps de temps requis pour atteindre les contrastes de densité observés actuellement (par croissance gravitationnelle linéaire en $t^{2/3}$, puis non–linéaire), à partir du faible niveau d'anisotropie au moment du découplage photons-baryons et de l'émission de ce rayonnement, serait alors trop important. Dans un temps de Hubble, les fluctuations de densité ne dépasseraient pas 10^{-2} dans le cas ou seul ce gaz de baryons serait présent, alors que de nombreuses structures à fort contraste de densité sont bien évidemment présentes. En revanche, de la matière en interaction plus faible avec les fluides de photons et de baryons, se serait découplée antérieurement, et pourrait ainsi avoir un contraste de densité sous-jacent beaucoup plus important. Cette matière pourrait ensuite accélérer la croissance des fluctuations de la matière baryonique, jusqu'aux contrastes de densité caractéristiques des galaxies.

Il existe également d'autre raisons observationnelles qui laissent penser qu'une forme plus "exotique" de matière domine la densité de l'Univers. Les courbes de rotation des galaxies spirales, par exemple, restent obstinément plates — malgré la très faible masse visible présente — dans les régions extérieures du disque. La masse des amas de galaxies, déduite de mesures dynamiques, est plus élevée que leur masse lumineuse (galaxies et gaz chaud).

Quelle est la nature de cette matière sombre ? Les différentes possibilités se répartissent en trois catégories suivant la masse des particules considérées. En effet, l'aspect du champ de densité compris à l'intérieur d'une sphère de rayon de Hubble[3] dépend du moment où ces particules (qui dominent la densité de matière–énergie) deviennent non-relativistes, puisque toute perturbation dont la taille est inférieure au rayon de Hubble est gommée par le mouvement des particules lorsqu'elles sont relativistes (cet effet est appelé *free streaming*). En résumé, une particule plus massive sera devenue non-relativiste plus tôt après le *Big Bang* et donc aura gommé des perturbations de densité de plus petite taille. Ainsi, on qualifiera de matière sombre froide (*Cold Dark Matter*) les particules massives (masse supérieure à 1 GeV), de matière sombre tiède (*Warm Dark Matter*) les particules de masse intermédiaire (comprise entre $\sim$ 100 eV

[3]Le rayon de Hubble définit la taille de l'univers observable.

et $\sim$ 100 MeV), et de matière sombre chaude (*Hot Dark Matter*) les particules légères (de masse inférieure à 1 eV) ultra–relativistes. La coupure liée au *free streaming* correspond respectivement à des tailles typiques de structures sub–galactiques pour la CDM, de galaxies pour la WDM et de grandes structures pour la HDM. Dans le cadre de ce dernier modèle, les galaxies ne peuvent se former que par fragmentation des grandes structures (feuillets et filaments qui sont les premiers à se former). Il s'agit là d'un scénario hiérarchique d'un autre type (*top–down*), qui semble en désaccord avec les observations. Le point commun à tous ces types de particules est qu'ils interagissent très faiblement avec le reste de la matière. Bien sûr des modèles qui allient plusieurs types de matière peuvent également être conçus.

La nature de la matière sombre constitue un domaine de recherche actif tant au niveau de la physique des particules que de l'astrophysique. Les accélérateurs permettront bientôt de produire certains candidats massifs, et ont déjà permis d'éliminer la quasi–totalité des candidats de masse intermédiaire. Des expériences pour détecter directement ou indirectement, dans les divers domaines d'énergie, les particules "exotiques", sont en place à travers le monde. Une différence de masse entre deux espèces de neutrinos a été récemment détectée, et bien qu'un modèle dominé par de la matière chaude connaisse de nombreux problèmes astrophysiques, du fait de la grande vitesse et de la faible interaction des particules légères qui vont entraîner le lissage du champ de densité sur de grandes échelles (*free-streaming*), de la matière chaude en faible quantité est certainement présente dans l'Univers.

Il s'agira donc ici d'utiliser les propriétés génériques de la classe de candidats qui semble la plus viable du point de vue cosmologique, et d'évaluer les répercussions de l'introduction d'un tel type dominant de matière sombre, froide et non–baryonique sur la formation d'objets comme les galaxies et les amas de galaxies, qui sont actuellement observés dans l'univers.

2.2 L'univers homogène

Notre histoire des structures partira du moment où les équations d'Einstein deviennent une description valide de l'univers[4], c'est-à-dire peu après le temps de Planck, soit quelques 10^{-43} seconde après la "naissance" de l'Univers.

[4]Avant ce moment, la théorie classique de la gravitation ne peut être une description correcte de l'univers, et il faudrait avoir recours à une théorie quantique de la gravitation qui en est actuellement à ses premiers balbutiements.

A partir de ce moment–là, il est possible de décrire l'évolution dynamique de l'univers dans son ensemble, moyennant certaines hypothèses. Dans un premier temps, on traitera la distribution de matière (terme source ou encore tenseur impulsion–énergie) dans l'univers comme étant complètement homogène et isotrope, et, dans un second temps, les inhomogénéités de l'univers actuel (structures) seront analysées en tant que déviations par rapport à cet état "lisse" de l'univers très primordial. Il est aussi supposé que seule la gravitation domine la dynamique de l'univers à grande échelle. Un tel modèle d'univers — le plus simple que l'on puisse concevoir — est appelé modèle de Friedmann–Lemaître.

Comme les propriétés géométriques de l'espace sont déterminées par la distribution de matière dans les équations d'Einstein, il s'ensuit qu'aucune direction (isotropie) et aucun point (homogénéité) de l'espace ne seront privilégiés.

On peut alors montrer que la métrique de l'espace–temps la plus générale dans un tel univers, où l'on peut, de surcroît, définir un temps uniforme, s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

où $\mathbf{g}$ est le tenseur métrique, $k = 0, +1, -1$ est une constante et $a(t)$ ne dépend que du temps. On a également choisi un système d'unités où la vitesse de la lumière, c, est égale à 1. $a(t)$ est appelé paramètre d'échelle de l'Univers, et a et k déterminent la courbure scalaire C_s de l'espace tri–dimensionnel suivant $C_s = k/a^2$. r, θ et ϕ définissent quant à eux, un système de coordonnées dit "comobile", vu qu'un observateur immobile dans un tel système "suit" l'expansion de l'univers. La métrique définie par l'équation 1 est appelée métrique de Robertson–Walker.

Les mêmes considérations générales d'homogénéité et d'isotropie, font que, si l'on choisit (légitimement) de se placer dans ce repère comobile, où le fluide qui emplit l'Univers est au repos, on peut mettre le tenseur impulsion–énergie $\mathbf{T}$ sous forme diagonale (par analogie avec un fluide idéal), où la densité $\rho_b(t)$ occupe la première position diagonale, et le pression $p_b(t)$ les trois autres.

Finalement, on utilise l'équation d'Einstein, pour relier le tenseur métrique au tenseur impulsion–énergie, et décrire ainsi l'influence réciproque de la matière sur l'espace :

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu} R = 8\pi G \mathbf{T}_{\mu\nu} + \Lambda \mathbf{g}_{\mu\nu} \quad (2)$$

où $\mathbf{R}$ et R sont des fonctions de $\mathbf{g}$ et de ses dérivées premières et secondes par rapport aux coordonnées, G est la constante de gravitation universelle et Λ la constante cosmologique. Cette équation conduit[5], dans notre repère comobile, aux deux équations indépendantes suivantes (déduites des équations 1 et de la forme du tenseur $\mathbf{T}$) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2a(t)}{dt^2} &= -\frac{4\pi G a(t)}{3}\left(\rho_b(t) + 3p_b(t)\right) + \frac{\Lambda a(t)}{3} \\ \frac{d[\rho_b a^3(t)]}{dt} &= -p_b(t)\,\frac{da^3(t)}{dt} \end{aligned} \qquad (3)$$

dites de Friedmann–Lemaître. Avec l'équation d'état, ces deux équations forment un système fermé, décrivant complètement l'évolution dynamique d'un univers homogène et isotrope.

Les solutions de ces équations qui relient écoulement du temps et expansion de l'univers dans le cas particulier où la pression p_b de la matière est négligeable, et où il existe une solution analytique sont :

- si $\Omega_0 = 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$t = \frac{2}{3H_0(1+z)^{3/2}}$$

- si $\Omega_0 > 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$t = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\left(\arccos\left[\frac{2+\Omega_0(z-1)}{\Omega_0(1+z)}\right] - \frac{2\sqrt{(\Omega_0 z+1)(\Omega_0-1)}}{\Omega_0(1+z)}\right)$$

- si $0 < \Omega_0 < 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$t = \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}\left(-\mathrm{argcosh}\left[\frac{2+\Omega_0(\mathrm{z}-1)}{\Omega_0(1+\mathrm{z})}\right] + \frac{2\sqrt{(\Omega_0\mathrm{z}+1)(1-\Omega_0)}}{\Omega_0(1+\mathrm{z})}\right)$$

- si $\Omega_0 = 0$ et $\lambda_0 = 0$,

$$t = \frac{1}{H_0(1+z)}$$

- si $0 < \Omega_0 < 1$ et $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$,

$$t = \frac{2}{3H_0(1-\Omega_0)^{1/2}}\ \mathrm{argsinh}\left[\frac{\sqrt{1/\Omega_0 - 1}}{(1+\mathrm{z})^{3/2}}\right] \qquad (4)$$

---

[5]Un cas assez général est ici considéré, vu que l'on a tenu compte de la possibilité d'une contribution non nulle de la constante cosmologique Λ.

Nous avons introduit dans les équations 4, les quantités habituelles suivantes[6] :

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a} \ , \ H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0 \ , \ \Omega_0 \equiv \frac{8\pi G \rho_b(t_0)}{3H_0^2} \ , \ \lambda_0 \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \ , \qquad (5)$$

à savoir, dans l'ordre de lecture, le décalage spectral vers le rouge, le taux de croissance du paramètre d'échelle (plus communément appelé constante de Hubble), la densité de l'univers (en unité de densité critique[7]) et la constante cosmologique réduite.

2.3 Génération de fluctuations de densité

Après avoir établi les équations de mouvement (équations 3) d'un univers homogène et isotrope, se pose naturellement le problème d'expliciter le mécanisme qui a pu générer en son sein les "graines d'inhomogénéité" qui vont donner naissance aux structures telles qu'elles sont observées. Deux théories sont ici en concurrence pour produire ces inhomogénéités, l'inflation d'une part, et les défauts topologiques de l'autre. Cependant, il semble que les défauts rencontrent des difficultés pour expliquer les récentes observations des anisotropies du rayonnement du fond diffus cosmologique, en ce sens qu'ils parviennent difficilement à reproduire la forme du spectre de puissance de ces anisotropies. Nous nous contenterons donc de présenter brièvement dans cette section les principes de base de la théorie actuellement la plus viable : l'inflation.

Vu sous l'angle de la formation des structures par instabilité gravitationnelle, le problème majeur à circonvenir est le suivant : sachant que, pour des cosmologies raisonnables, une fluctuation de taille $l = 1$ Mpc, qui, à $z = 0$, comprend la masse d'une galaxie, est plus grande que le rayon de Hubble r_H, dès lors que le décalage spectral est supérieur à 10^6, comment un processus physique peut-il engendrer une fluctuation cohérente à cette échelle dans l'univers très primordial ?

L'inflation (dans la plupart de ses différentes implémentations) résout ce problème en supposant que, lorsque l'univers atteint la température de $T \simeq 10^{14}$ GeV, correspondant à l'échelle d'énergie au–dessus de laquelle les forces nucléaire forte et électrofaible sont unifiées dans les théories dites GUT (*Grand Unified Theories*), un champ scalaire nommé inflaton, ϕ, subit une transition entre deux états du vide, durant laquelle la densité d'énergie de l'univers reste quasi–constante. Cela entraîne une phase de croissance exponentielle de l'univers, alors que r_H ne

---

[6]Dans la suite du texte, l'indice zéro dénotera l'époque actuelle.

[7]C'est-à-dire la densité pour laquelle la courbure de l'univers est nulle.

change pratiquement pas. Les perturbations peuvent alors être générées par des processus physiques au moment où elles sont à l'intérieur de la sphère causale délimitée par ce r_H, puis croître de manière exponentielle durant l' inflation jusqu'à acquérir une taille supérieure à ce rayon. Elles sont alors "gelées" jusqu'à la fin de la phase inflationnaire. Puis, croissant moins vite que r_H dans un univers post–inflationnaire dominé par la radiation, elles rentreront de nouveau (vers un décalage spectral de quelques 10^6 pour les fluctuations renfermant la masse typique des galaxies) à l'intérieur de l'univers observable.

Les graines génératrices des perturbations observées actuellement sont donc, de manière naturelle, les fluctuations quantiques du champ scalaire. Cependant, le calcul de perturbations classiques générées par des fluctuations quantiques est ardu techniquement et encore incomplètement résolu sur le plan conceptuel. Nous noterons donc simplement qu'en prenant ρ_b comme densité moyenne de l'univers, et en définissant le contraste de densité d'une perturbation comme

$$\delta \equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \tag{6}$$

on peut montrer (voir [83] pour une démonstration simplifiée) que la transformée de Fourier du contraste de densité à l'instant $t_{\rm bis}$, où la perturbation de taille caractéristique $l \approx 1/k$ rentre de nouveau à l'intérieur de l'univers observable est :

$$\delta(\vec{k}, t_{\rm bis}) = \frac{4}{3}\left(\frac{\dot{\sigma}_k}{\dot{\phi}_0}\right)_{t=t_{\rm bis}} \tag{7}$$

où $\sigma_k^2(t)$ est le spectre de puissance des fluctuations quantiques du champ scalaire ϕ, et ϕ_0 est la solution classique de la phase de "roulement lent" (*slow roll-over*) dans un univers en expansion :

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0\,, \tag{8}$$

$V(\phi)$ étant le potentiel du champ scalaire. Si ce dernier est connu, on obtient donc le spectre de puissance des fluctuations. Pour un potentiel de Coleman–Weinberg (typique des scénarios inflationnaires) :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda\phi_m^4 + \lambda\phi^4\left\{\ln\frac{\phi^2}{\phi_m^2} - \frac{1}{2}\right\} \tag{9}$$

ayant pour constante de couplage λ et comme état fondamental vrai ϕ_m à température nulle, des calculs détaillés conduisent au spectre de puissance invariant d'échelle suivant :

$$P(k, t_{\rm bis}) \equiv |\delta(\vec{k}, t_{\rm bis})|^2 = A\lambda k \tag{10}$$

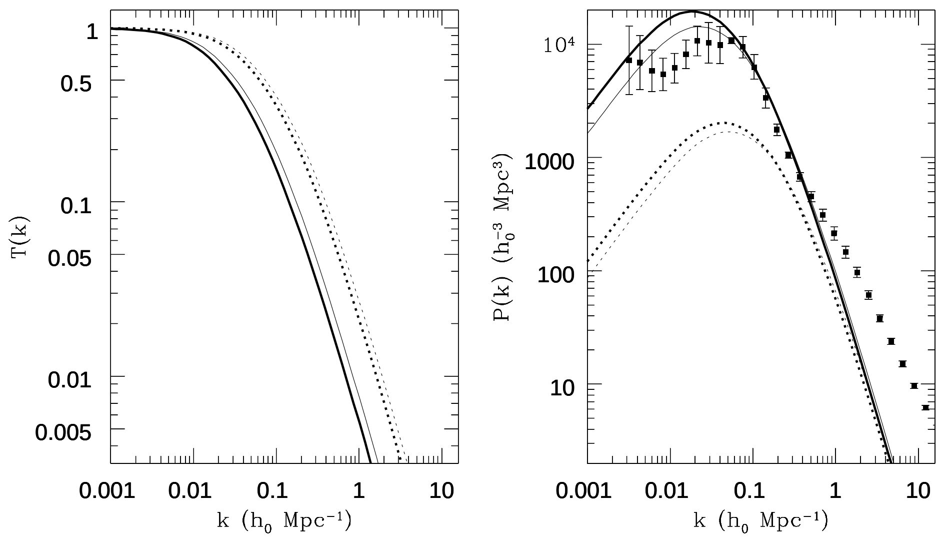

Figure 1. – Fonctions de transfert (vignette de gauche) et spectres de puissance linéaires (vignette de droite) des fluctuations pour deux modèles cosmologiques. Pointillés : CDM standard ($\sigma_8 = 0.51$, $\Omega_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$ et $H_0 = 50$ km s^{-1} Mpc^{-1}). Courbes pleines : ΛCDM ($\sigma_8 = 0.88$, $\Omega_0 = 1/3$, $\lambda_0 = 2/3$ et $H_0 = 67$ km s^{-1} Mpc^{-1}). L'effet de Ω_B, contenu baryonique de l'univers, est représenté au travers de deux valeurs, zéro (trait fin) et $0.02\ h_0^{-2}$ (trait épais). Données : catalogue de galaxies APM [90] normalisées à $\sigma_{8h_0^{-1}} = 1$, (la lumière est supposée être un traceur non biaisé de la masse).

avec une constante A qui dépend, pour les détails, de la forme exacte du potentiel $V(\phi)$, mais est de l'ordre de 10^5 Mpc^4. Ce spectre de puissance est couramment appelé spectre de Harrison–Zel'dovich. En supposant que les fluctuations de température du fond du ciel micro–onde soient entièrement dues aux fluctuations dans le champ de matière décrites par ce spectre, il faut alors choisir une constante sans dimension $\lambda \simeq 10^{-14}$ pour ne pas violer les contraintes observationnelles. Cet intervalle extrêmement restreint des valeurs possibles de la constante de couplage (*fine-tuning*) est à la fois un problème (il faut expliquer d'où vient cette valeur si faible) et un atout majeur. En effet, c'est parce que l'inflaton est si faiblement couplé qu'il se comporte comme un champ libre, et donc qu'il doit nécessairement avoir des fluctuations gaussiennes, complètement décrites par leur spectre de puissance $P(k)$.

2.4 Spectre de puissance linéaire

Se pose alors la question de la manière dont vont évoluer les fluctuations caractérisées par un tel spectre de puissance initialement invariant d'échelle. Car les perturbations vont entrer de nouveau sous l'horizon à différentes époques, et donc être soumises à des processus physiques qui vont modifier leur croissance à des moments différents. De sorte qu'à l'époque de la naissance des galaxies, époque à laquelle la densité de l'univers est dominée par la matière, le spectre de puissance n'est plus invariant d'échelle. Pour définir ce spectre il suffit en principe (et c'est un problème passionnant en lui-même) de connaître la composition de la matière de l'univers, et les propriétés spécifiques de chacune des composantes.

Nous nous plaçons ici dans le cas où la matière sombre froide (CDM) non-baryonique constitue la majeure fraction (en masse) du contenu de l'univers, par ailleurs peuplé de matière "normale" baryonique.

Deux choix sont alors possibles, selon le candidat CDM considéré. Si l'on pense que les fluctuations quantiques primordiales perturbent un champ faiblement couplé à l'inflaton, type axion, alors ces fluctuations deviennent perturbations dans la densité d'énergie associée à la matière froide lorsque cet axion acquiert une masse, c'est-à-dire lorsque l'univers atteint une température de l'ordre de 200 MeV, caractéristique de l'échelle d'énergie $\Lambda_{\rm QCD}$ de la chromodynamique quantique. Comme à cette époque (post–inflationnaire), les tailles minimales des fluctuations sont très supérieures à r_H, il en résulte que la densité d'énergie locale, et par conséquent la courbure de l'univers observable ne peuvent être perturbées par ces fluctuations. En conséquence de quoi, de telles perturbations sont qualifiées d'"isocourbures" [88]. En revanche, dans le cas où les fluctuations quantiques primordiales sont celles de l'inflaton lui–même, le rapport de la densité de matière froide à la densité d'entropie n'est pas perturbé par les fluctuations, et le spectre résultant est alors nommé "adiabatique" [89].

Par souci de simplification, mais également au vu des problèmes théoriques et observationnels que rencontre tout candidat de type axion, nous nous contenterons par la suite de considérer que les fluctuations sont essentiellement de nature adiabatique.

Il est alors possible de résumer l'évolution du spectre initial invariant d'échelle $P(k, t_{\rm bis}) \propto k$ sous la forme d'une fonction $T(k,t)$ agissant dans l'espace de Fourier et nommée fonction de transfert. De telle sorte que les fluctuations linéaires, au temps t (typiquement après la recombinaison pour z $\leq$ 1000), ont un spectre donné par :

$$P(k,t) = T^2(k,t)P(k,t_{\rm bis}) \tag{11}$$

Cette fonction de transfert prend en compte la croissance des fluctuations, et les divers processus physiques suceptibles d'altérer cette croissance lorsqu'elles pénètrent à nouveau à l'intérieur de l'univers observable.

Sans rentrer dans des détails qui dépasseraient le cadre de notre sujet (voir par exemple [84] ou [85]), on peut, par des raisonnements très simples, avoir l'intuition des processus en cours. D'une part, les perturbations dont la taille est supérieure au rayon de Hubble ne peuvent éviter de croître. En effet, pour une perturbation de taille caractéristique λ_p, avec

$$\lambda_p > d_H(t) \equiv \left(\frac{a}{\dot{a}}\right) \equiv \frac{1}{H(t)} \tag{12}$$

le fond et la perturbation évoluent respectivement comme

$$\begin{aligned} H_b^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho_b \\ H_p^2 + \frac{1}{a_p^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho_p \end{aligned} \tag{13}$$

puisque, pour le fond, les termes de courbure et de constante cosmologique sont négligeables devant le terme de densité. A un temps tel que $H_p = H_b$, on a

$$\delta_p \equiv \frac{\rho_p - \rho_b}{\rho_b} = \frac{3}{8\pi G\rho_b a_p^2} \approx \frac{3}{8\pi G\rho_b a_b^2} \tag{14}$$

D'où la croissance suivante, avant et après l'équivalence matière-radiation

$$\begin{array}{lll} t < t_{eq} & \rho_b \propto a_b^{-4} & \delta_p \propto a_b^2 \\ t > t_{eq} & \rho_b \propto a_b^{-3} & \delta_p \propto a_b \end{array} \tag{15}$$

On peut aussi comprendre simplement dans quelles conditions les perturbations *ne* croissent *pas* une fois qu'elles sont rentrées sous le rayon de Hubble, en raison de différents effets :

- Effet des forces de pression. Lorsque l'échelle de temps caractéristique des forces de pression de la composante perturbée est plus courte que l'échelle de temps dynamique de la composante dominante, on a :

  $$\frac{\lambda_p}{v_p} \simeq t_{press} < t_{grav} \simeq \frac{1}{(G\rho_{dom})^{1/2}} \tag{16}$$

  où v_p est la vitesse de dispersion de la perturbation. La taille de la perturbation est inférieure à la longueur de Jeans :

  $$\lambda_p < \lambda_J \equiv \sqrt{\pi}\frac{v_p}{(G\rho_{dom})^{1/2}} \tag{17}$$

C'est le cas lorsque les perturbations pénètrent de nouveau sous l'horizon alors que l'univers est dominé par la radiation, et que $v_p \approx c/\sqrt{3}$. Ces perturbations sont gelées jusque t_{eq} et peuvent croître à nouveau par la suite.

– Lissage des fluctuations de matière sombre qui pénètrent sous l'horizon alors que les particules non–collisionnelles sont encore relativistes (*free–streaming* directement relié à la nature de la matière sombre, voir plus haut). Pour les baryons, amortissement exponentiel des oscillations acoustiques aux échelles permettant la diffusion des photons hors des pics de surdensité jusqu'à la recombinaison (*Silk damping*).

On peut ainsi tabuler simplement la variation des différentes grandeurs avec le paramètre d'échelle a, comme le montre la table 1.

Table 1. – Evolution de différents paramètres et du contraste de densité avec le paramètre d'échelle de l'univers $a \equiv a_b$. Les temps t_{nr} et t_{eq} sont les instants respectifs où les particules non-collisionnelles deviennent non-relativistes et où les contributions matière-radiation à la densité d'énergie de l'Univers deviennent égales. Les indices DM, R, H, et J dénotent respectivement la composante matière sombre, la composante radiation, et les grandeurs de Hubble et de Jeans.

	ρ_{DM}	ρ_R	r_H	$M_{H,DM}$	λ_J	v_{DM}	$M_{J,DM}$
$t < t_{nr}$	a^{-4}	a^{-4}	a^2	a^2	a^2	1	a^2
$t_{nr} < t < t_{eq}$	a^{-3}	a^{-4}	a^2	a^3	a	a^{-1}	cste
$t_{eq} < t$	a^{-3}	a^{-4}	$a^{3/2}$	$a^{3/2}$	$a^{1/2}$	a^{-1}	$a^{-3/2}$

Plus précisément, les différentes échelles caractéristiques introduites par ces processus peuvent être combinées au moyen d'une fonction de transfert. Pour un univers fortement dominé par de la matière sombre froide non–collisionnelle, cette dernière est bien ajustée par [24] :

$$T(k) = \frac{\ln[1 + 2.34q]}{2.34q} \left(1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4\right)^{-\frac{1}{4}} \tag{18}$$

avec [91]

$$q \equiv \frac{k}{\Gamma} = \frac{k}{\Omega_0 h_0 \exp\left[-\Omega_B(1 + \frac{\sqrt{h_0/0.5}}{\Omega_0})\right]} \tag{19}$$

où l'on a noté $h_0 = H_0/100$ et $k \approx 1/\lambda_p$. On a également défini Γ comme étant le facteur de forme. Nous montrons sur la figure 1 l'allure de la fonction de transfert (18) ainsi que celle du spectre de puissance. Notons que cette approche peut être généralisée à d'autres types de matière tels que HDM (neutrinos très légers), WDM (particules de masse intermédiaire), MDM (mélange de neutrinos légers et de matière sombre froide) (voir, pour une revue, [92]). Le spectre CDM a donc la forme d'une loi de puissance $P(k) \propto k^m$ où $-3 \leq m \leq 1$ lorsque k décroît des petites aux grandes échelles, avec une coupure aux petites échelles associée au lissage des fluctuations par les particules de matière sombre lorsqu'elles sont encore relativistes.

3 Croissance linéaire des fluctuations

3.1 Linéarisation des équations

Considérons la matière comme un fluide idéal sans pression dans un univers en expansion, dominé par la matière sombre non–relativiste, après l'équivalence matière-radiation à t_{eq} (univers dit *matter–dominated*). A l'époque où ce fluide est la composante dominante, la première équation à laquelle il est soumis s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}[\vec{r}, t] + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\rho \vec{u})[\vec{r}, t] = 0\,, \tag{20}$$

où $\vec{r}$ est la position en coordonnées physiques d'une particule de fluide et $\vec{u}$ sa vitesse. L'équation 20 est appelée équation de conservation de la masse.

Vient ensuite l'équation

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}[\vec{r}, t] + (\vec{u}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{u}[\vec{r}, t] = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\Phi[\vec{r}, t] \tag{21}$$

qui est l'équation d'Euler (sans gradient de pression).

Finalement, la dernière équation, celle de Poisson, pour le potentiel gravitationnel Φ et une pression négligeable, s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)^2 \Phi[\vec{r}, t] = 4\pi G \rho[\vec{r}, t] - \Lambda\,. \tag{22}$$

En toute rigueur, ces équations caractérisent le comportement de la matière dans un univers de Friedmann–Lemaître aux échelles petites devant le rayon de Hubble et lorsque cette matière est éloignée d'un trou noir.

On peut réécrire ces équations dans le système de coordonnées comobiles défini par $\vec{x} = \vec{r}/a(t)$, où $a(t)$ est le facteur d'expansion de l'univers. La vitesse $\vec{u}$ se met alors sous la forme $\vec{u} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}[\vec{x}, t]$ où le terme $\dot{a}\vec{x}$ est nommé flot de Hubble et $\vec{v}[\vec{x}, t]$ est la vitesse particulière d'une particule de fluide, ce qui conduit à :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t}[\vec{x}, t] + \frac{3\dot{a}}{a}\rho[\vec{x}, t] + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\rho\vec{v})[\vec{x}, t] &= 0 \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}[\vec{x}, t] + \frac{1}{a}(\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{x}})\vec{v}[\vec{x}, t] + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}[\vec{x}, t] &= -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\Phi'[\vec{x}, t] \\
\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2 \Phi'[\vec{x}, t] &= 4\pi G\rho[\vec{x}, t] - \Lambda + 3\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

où l'on a défini un nouveau potentiel gravitationnel [8] $\Phi' = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}\vec{x}^2$.

Dans la limite où le fluide est peu perturbé par rapport à l'univers homogène (ce que l'on pense être vrai à grand décalage spectral) on peut écrire $\rho[\vec{x}, t] = \rho_b[t](1+\delta[\vec{x}, t])$ avec $\delta[\vec{x}, t] \ll 1$, et $(vd/t_e)^2 \ll \delta$ où v est la vitesse caractérisque de la perturbation, d la longueur de cohérence pour les variations spatiales de δ, et t_e le temps d'expansion $\sim (G\rho_b)^{-1/2}$. Il suffit alors d'utiliser l'équation de mouvement 3 qui gouverne l'évolution du facteur d'expansion de l'univers homogène, $a[t]$, dans un univers de Friedmann avec constante cosmologique non nulle et pression de radiation négligeable :

$$
\frac{d^2 a[t]}{dt^2} = -\frac{4\pi G\rho_b a[t]}{3} + \frac{\Lambda}{3}a[t] \qquad (24)
$$

et de linéariser le groupe d'équations 23, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial t}[\vec{x}, t] + \frac{1}{a}\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}}[\vec{x}, t] &= 0 \\
\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}[\vec{x}, t] + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t}[\vec{x}, t] &= 4\pi G\rho_b\delta[\vec{x}, t] \\
\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2 \Phi'[\vec{x}, t] &= 4\pi G\rho_b a^2\delta[\vec{x}, t] \qquad (25)
\end{aligned}
$$

qui sont les équations décrivant la croissance linéaire des fluctuations de densité pour un fluide idéal contenu dans un univers en expansion.

---

[8] On a le droit de faire ce changement car il revient à ajouter une dérivée totale par rapport au temps au Lagrangien du système, ce qui ne change pas l'action (*c.f.* [82]).

3.2 Solution générale

En remarquant, à la suite de [93], qu'une perturbation à symétrie sphérique, et sans pression, ayant une densité moyenne $\rho_p[t]$, évolue à la manière d'un univers homogène découplé, on peut montrer [94] que le rapport des densités moyennes des deux univers (la perturbation et l'univers dans lequel elle croît), que l'on note δ_p, obéit au même ensemble d'équations linéarisées qu'un fluide parfait, de pression nulle, situé dans un univers en expansion, à condition, bien sûr, que $\delta_p[t] \ll 1$ et $(vd/t_e)^2 \ll \delta_p$.

De fait, si l'on compare une perturbation de masse donnée à un morceau d'univers homogène contenant la même masse, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \rho_p a_p^3[t] &\equiv \rho_b a^3[t],\ a_p[t] \equiv a(1-\epsilon)[t], \\ \delta_p[t] &\equiv \rho_p/\rho_b[t] - 1 = 3\epsilon[t]\,. \end{aligned} \tag{26}$$

La substitution des équations 26 dans l'équation 24 (où $a[t]$ est remplacé par $a_p[t]$ et $\rho_b[t]$ par $\rho_p[t]$) donne, au premier ordre en ϵ :

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\epsilon}{dt} = 4\pi G\rho_b\epsilon \tag{27}$$

qui est exactement la forme linéarisée de l'équation de mouvement d'un fluide parfait de pression nulle dans un univers en expansion (*c.f.* la seconde équation du groupe 25).

Donc, il suffit de résoudre l'équation 24 pour a (on abandonnera, par raison de commodité, les indices p pour la perturbation, sauf dans les cas ambigüs) et d'en déduire les solutions pour δ (voir, par exemple, [82]). On peut montrer que ces solutions sont au nombre de deux [95], et forment un ensemble complet [94]. Elles se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} D_d[z] &= H_0\left\{\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0-\lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0\right\}^{\frac{1}{2}} \\ D_c[z] &= \frac{D_d[z]}{a_0^2}\int_z^\infty \frac{(1+x)}{D_d^3[x]}\mathrm{dx} \end{aligned} \tag{28}$$

où les indices d et c indiquent respectivement les modes décroissant et croissant de la perturbation. Pour les cas particuliers suivants, il existe une expression analytique pour ces modes de décroissance et de croissance :

- si $\Omega_0 = 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$D_d[z] = H_0(1+z)^{3/2}$$

$$D_c[z] = \frac{2}{5a_0^2H_0^2}\frac{1}{(1+z)}$$

- si $\Omega_0 > 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
D_d[z] &= H_0(1+z)\sqrt{\Omega_0 z + 1} \\
D_c[z] &= \frac{1}{a_0^2H_0^2}\frac{1}{\Omega_0 - 1}\Big(-1 + 3\frac{\Omega_0(1+z)}{\Omega_0 - 1} \\
&- 3\frac{\Omega_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{\Omega_0 - 1}}{\sqrt{1+\Omega_0 z}}\right]\Big)
\end{aligned}$$

- si $0 < \Omega_0 < 1$ et $\lambda_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
D_d[z] &= H_0(1+z)\sqrt{\Omega_0 z + 1} \\
D_c[z] &= \frac{1}{a_0^2H_0^2}\frac{1}{1 - \Omega_0}\Big(1 + 3\frac{\Omega_0(1+z)}{1 - \Omega_0} \\
&+ 3\frac{\Omega_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{(1 - \Omega_0)^{3/2}}\ln\left[\frac{\sqrt{1+\Omega_0 z} - \sqrt{1-\Omega_0}}{\sqrt{\Omega_0(1+z)}}\right]\Big)
\end{aligned} \tag{29}$$

Dans les équations 28, seul le mode croissant a un intérêt pratique. En effet, le mode décroissant, par définition, voit son amplitude diminuer avec le temps jusqu'à devenir complètement négligeable. La question se reformule donc de la manière suivante : quelle fraction de la perturbation initiale participe-t-elle du mode croissant ? Pour répondre à cette question, force est de faire des hypothèses quant à la vitesse initiale particulière de la perturbation, et d'utiliser l'équation de continuité du fluide parfait, qui relie gradient de vitesse et contraste de densité (première équation du groupe 25).

Dans l'hypothèse où la vitesse particulière initiale $\vec{v}_i$ de la perturbation δ_i est nulle, c'est-à-dire où la perturbation suit simplement l'univers en expansion [9] à l'instant initial t_i, le contraste de densité, $\delta[z]$, dans le

[9] En fait, ce cas n'est pas si particulier qu'il peut sembler de prime abord, car il suffit d'un simple changement de l'origine temporelle pour s'y ramener dans le cas où la vitesse de la perturbation n'est pas nulle initialement.

régime linéaire, croît selon [10] [82] :

$$\delta[z] \quad = \quad \left\{\frac{3}{2}\Omega_0(1+z_i)+1-\Omega_0-\lambda_0\right\} H_0^2 a_0^2\, D_c[z]\, \delta_i \qquad (30)$$

3.3 Un cas simple : la cosmologie Einstein – de Sitter

Dans le cas d'une cosmologie dite d'Einstein – de Sitter, définie par les paramètres $\Omega_0 = 1$ et $\lambda_0 = 0$, le paramètre d'échelle varie comme $t^{2/3}$. On peut tester des solutions de la forme $D \propto t^\alpha$ dans l'équation 27. On trouve alors la solution croissante avec $\alpha = 2/3$ et la solution décroissante avec $\alpha = -1$. Le mode croissant croît donc simplement comme $(1+z)^{-1}$. Pour des conditions initiales avec vitesse particulière nulle, la formule 30 se simplifie à l'aide des équations 29 (premier cas) pour aboutir au résultat bien connu :

$$\delta[z] = \frac{3}{5}\,\frac{1+z_i}{1+z}\,\delta_i \qquad (31)$$

Par la suite, on parlera de contraste de densité linéairement extrapolé jusqu'au temps présent ($z = 0$), que l'on notera $\delta_0 \equiv \delta[0]$. Il s'agit du contraste de densité qu'aurait une perturbation initiale δ_i si elle n'avait cessé de croître de façon linéaire jusqu'à maintenant.

4 Croissance non–linéaire d'une perturbation sphérique et homogène

Les galaxies ont des contrastes de densité tellement élevés, qu'ils ne peuvent évidemment être décrits à l'aide d'une théorie linéaire du contraste de densité. Pour parvenir à une théorie non–linéaire, considérons tout d'abord le modèle le plus simple qui puisse venir à l'esprit, celui d'une perturbation de densité sphérique, uniforme et isolée évoluant dans un univers par ailleurs complètement homogène. Communément appelé modèle de perturbation "haut–de–forme", (*top hat* en anglais) en raison de la forme du profil de densité, ce modèle très simple est couramment utilisé, car l'évolution non–linéaire de la perturbation y est complètement descriptible de manière analytique.

Le théorème de Birkhoff [96] nous dit qu'une telle perturbation se comporte comme un univers indépendant, le champ de matière extérieur n'ayant aucune influence sur son évolution. Nous considérerons donc dans

[10]Dans la suite du texte, tout indice i définira des quantités initiales, sauf mention explicite du contraire.

cette section la croissance d'une fluctuation homogène et sans pression, de symétrie sphérique, au delà du régime linéaire, en nous servant des équations établies précedemment pour l'univers homogène et isotrope.

À la différence de la section 3.2, où la symétrie sphérique n'intervenait que comme une astuce mathématique, utilisée pour parvenir à résoudre le problème de la croissance linéaire de n'importe quelle fluctuation de densité (à symétrie sphérique ou non) dans un univers en expansion, la solution du "haut–de–forme" exploite explicitement les simplifications apportées par une telle symétrie.

Tant que les différentes couches de matière de la perturbation ne se croisent pas, ou, en d'autres termes, tant que la masse à l'intérieur de chaque couche reste constante, on peut utiliser l'équation 24 pour décrire le mouvement d'une particule test, située à la distance physique r du centre de la perturbation.

4.1 Cas d'école $\Lambda = 0$

Supposons qu'au temps t_i, notre perturbation sphérique de rayon r_i, ait une surdensité uniforme $\delta_i \equiv [\rho(t_i) - \rho_b(t_i)]/\rho_b(t_i)$ par rapport au reste de l'univers ($\delta_i \ll 1$). Elle enclôt une masse $M = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \rho_b(t_i)(1+\delta_i) \simeq \frac{4}{3}\pi r_i^3 \rho_b(t_i)$. L'équation de mouvement de sa couche sphérique externe s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E \tag{32}$$

ou E est une constante. Les énergies cinétique et potentielle par unité de masse valent alors :

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2_{t=t_i} = \frac{H_i^2 r_i^2}{2} \\ U_i &= -\left(\frac{GM}{r}\right)_{t=t_i} = -\frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 \Omega_i (1+\delta_i) = -K_i \Omega_i (1+\delta_i) \end{aligned} \tag{33}$$

à l'instant initial t_i. D'où l'énergie mécanique par unité de masse :

$$E = E_i = K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1+\delta_i)] \tag{34}$$

On voit alors clairement que les perturbations sont liées et vont s'effondrer ($E < 0$) si et seulement si $\delta_i > \Omega_i^{-1} - 1$. Le rayon r_m d'expansion maximum pour ces perturbations liées est alors obtenu en écrivant que la vitesse de la couche externe s'annule à cet instant, ce qui entraîne $E = -GM/r_m$. D'où :

$$\frac{r_m}{r_i} = \frac{1+\delta_i}{\delta_i - (\Omega_i^{-1} - 1)} \tag{35}$$

La solution bien connue de l'équation du mouvement pour une perturbation sur-dense ($\delta_i > \Omega_i^{-1} - 1$) se met sous la forme paramétrique suivante :

$$\begin{array}{rcll} r & = & A(1-\cos\theta) & \Rightarrow \quad r_m = 2A \\ t+T & = & B(\theta - \sin\theta) & \Rightarrow \quad t_m + T = \pi B \\ A^3 & = & GMB^2 & \end{array} \tag{36}$$

où $T \approx 1/\sqrt{6\pi G\rho_b(t=t_i)} - t_i$, fixé par les conditions initiales, est toujours très petit. Ces équations permettent alors de fixer A et B en fonction des conditions initiales r_i et δ_i, et caractérisent complètement le mouvement.

4.2 Cas géneral où $\Lambda \neq 0$

Comme pour le cas $\Lambda = 0$, au moment d'expansion maximale, on peut écrire $\dot{r} = 0$, mais cette fois-ci en utilisant l'équation de mouvement générale 24, et intégrer cette dernière afin d'obtenir le temps t_m auquel notre perturbation atteint ce rayon maximal d'expansion r_m :

$$t_m = t_i + \frac{1}{H_0}\int_1^{r_m/r_i} \frac{\eta^{1/2}}{D_p[\eta]^{1/2}}\,\mathrm{d}\eta \tag{37}$$

où $\eta \equiv r[t]/r_i$ est un paramètre sans dimension, et

$$\begin{array}{rcl} D_p[\eta] & = & \lambda_0\,\eta^3 + \{(1-\Omega_0-\lambda_0)(1+z_i)^2 \\ & - & \Omega_0\delta_i(1+z_i)^3\}\,\eta + \Omega_0(1+\delta_i)(1+z_i)^3\,. \end{array} \tag{38}$$

r_m/r_i est la première racine réelle > 1 de l'équation cubique (*c.f.* [97]) :

$$D_p[\eta] = 0 \tag{39}$$

Dès lors qu'elle a atteint ce rayon maximal, la perturbation se découple complètement de l'expansion de l'univers, et s'effondre gravitationnellement sur elle–même, en un temps total Δt_{coll} dicté par la symétrie du problème : $\Delta t_{coll} = 2t_m$. Utilisant les équations précédentes, on peut alors relier le contraste de densité δ_0, linéairement extrapolé jusqu'à aujourd'hui (voir équation 30), ainsi que le rayon R que la perturbation aurait si elle avait simplement suivi l'expansion de l'univers, au décalage spectral auquel se produit l'effondrement gravitationnel z_{coll} de la perturbation. Pour cela, il suffit de calculer le décalage spectral auquel le temps t_{coll} marquant l'effondrement de la perturbation correspond dans l'univers non-perturbé[11] :

$$t_{coll} \equiv \int_{z_{coll}}^{\infty} \frac{1}{(1+x)D_d[x]}\,\mathrm{d}x \tag{40}$$

---

[11] A la seule condition, évidente, que t_{coll} soit inférieur à l'âge de l'univers !

On définit également le contraste de densité critique linéairement extrapolé jusqu'à $z = 0$, $\delta_{0c}[1+z_{coll}]$, par extrapolation linéaire du contraste de densité $\delta_c(t_i)$, que doit avoir une perturbation (ou, ce qui est équivalent, un univers fermé) au temps initial t_i, par rapport à l'univers homogène, pour s'effondrer précisément à t_{coll}. Dans le cas le plus général, ce contraste de densité critique doit être intégré numériquement, mais nous donnons ci-dessous les calculs pour le cas particulier de l'univers d'Einstein – de Sitter où une solution analytique peut être obtenue.

4.3 Retour au cas d'école $\Lambda = 0$

Pour un univers avec ($\Omega_0 = 1$), sans constante cosmologique ($\lambda_0 = 0$) on retrouve l'expression analytique pour la croissance en régime linéaire, en faisant un développement limité du groupe d'équations 36 aux petits angles ($\theta \ll 1$) :

$$\begin{aligned} r &\simeq \frac{A\theta^2}{2} \\ t &\simeq \frac{B\theta^3}{6} \\ \delta &\simeq \frac{3\theta^2}{20} \end{aligned} \tag{41}$$

D'où les évolutions linéaires très simples déjà obtenues dans le cas de perturbations non sphériques :

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{r_i}{\delta_i} \\ \delta &= \frac{3}{5}\delta_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} = \frac{3}{5}\delta_i \frac{1+z_i}{1+z} \end{aligned} \tag{42}$$

Soit, en définissant les grandeurs linéairement extrapolées

$$\begin{aligned} R &\equiv r_i \frac{a_0}{a_i} = r_i(1+z_i) \\ \delta_0 &= \frac{3}{5}\delta_i(1+z_i) \end{aligned} \tag{43}$$

On arrive aux formules bien connues (posant $t_{coll} = 2t_m$) :

$$\begin{aligned} \frac{r_m}{R} &= \frac{3}{5\delta_0} \\ 1+z_{coll} &= \frac{5}{3}\frac{\delta_0}{(3\pi/2)^{2/3}} \simeq \frac{\delta_0}{1.686} \end{aligned} \tag{44}$$

Remarquons finalement que dans ce cas particulier, la condition sur le contraste de densité critique initial, $\delta_c(t_i) > 0$ est toujours vérifiée (on ne s'interesse évidemment qu'aux perturbations sur-denses qui sont les seules susceptibles de donner naissance aux galaxies). Le contraste (linéairement extrapolé) au seuil permettant un effondrement à z vaut donc $\delta_{0c} = 1.686(1+z)$.

4.4 Accrétion secondaire et virialisation

Le modèle de surdensité sphérique uniforme précédemment décrit est irréaliste pour des raisons évidentes d'instabilité vis–à–vis de la moindre perturbation dans la symétrie pré–effondrement du champ de matière. Dans la pratique, cela conduit à ce qu'on appelle des déferlements successifs avec croisement des coquilles de matière. Ces processus ont été étudiés avec soin par [98]. Et nous discuterons ici seulement les principaux résultats (changements), apportés par ce modèle plus réaliste, à la fois pour souligner les faiblesses du modèle sphérique, et pour obtenir une description analytique du profil de densité post–effondrement de notre perturbation.

En particulier, cela implique que t_{coll}, défini comme le moment auquel la densité au centre de la perturbation devient infinie dans le modèle sphérique, est supérieur au temps auquel l'effondrement a réellement lieu, défini comme l'instant du premier croisement de coquilles de matière au centre de la perturbation. Cette dernière définition va évidemment introduire une dépendance vis–à–vis de la forme particulière et du profil de densité pré–effondrement de chaque halo. Cependant, le problème de fond, soulevé par le modèle "haut-de-forme", auquel il ne propose, du reste, pas de solution, est celui du devenir du halo après qu'il s'est effondré sous l'effet de sa propre gravitation.

De fait, [98] ont montré que les halos, résultant de la croissance de fluctuations initiales surdenses ayant un profil de densité monotone lisse, ont, au moment de leur effondrement, un profil de densité en forme de loi de puissance. Et, bien que les indices de ces lois de puissance soient généralement très différents, et dépendent des profils des sur–densités initiales, [99] ont apporté la preuve numérique que l'évolution post–effondrement des halos était auto–similaire, avec le même indice pour la loi de puissance qu'au moment de l'effondrement. En réalité, la précédente affirmation n'est correcte que pour des halos dont le profil de densité est assez pentu. Dans le cas contraire (pente > -2 ou > -1.8 si on relaxe l'hypothèse de symétrie sphérique pour le halo), la pente du profil de densité post–effondrement devient $= -2$ (ou $= -1.8$), en parfait accord avec la valeur analytique minimale prédite par [100].

Cependant, il nous faut mentionner deux points d'achoppement de la croissance (post–effondrement) auto–similaire des halos. Premièrement,

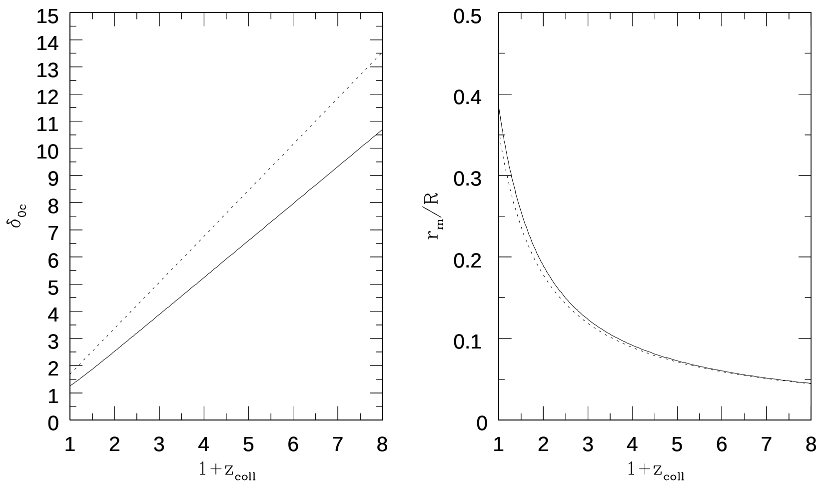

Figure 2. – Contraste de densité critique linéairement extrapolé jusqu'au décalage spectral $z = 0$, δ_{0c} (vignette de gauche), et rapport entre rayon d'expansion maximal r_m de la perturbation, et rayon R linéairement extrapolé jusqu'à $z = 0$ (vignette de droite). En pointillés figure le modèle CDM standard ($\sigma_8 = 0.51$, $\Omega_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$ et $H_0 = 50$ km s^{-1} Mpc^{-1}) et en trait plein le ΛCDM ($\sigma_8 = 0.88$, $\Omega_0 = 1/3$, $\lambda_0 = 2/3$ et $H_0 = 67$ km s^{-1} Mpc^{-1}). La courbe en trait plein sur la vignette de gauche n'est pas une droite (voir texte) !

ce régime ne dure que le temps pendant lequel les réserves de matière environnantes sont suffisantes pour l'alimenter. Dès lors que l'on se trouve en situation de pénurie, le profil de densité a tendance à s'aplatir dans les régions centrales, et, au contraire, à devenir plus pentu dans les régions externes [99]. Deuxièmement, comme l'on s'intéresse à un halo isolé, on ne peut s'attendre à décrire correctement des processus comme la fusion de deux halos de masses équivalentes. Les halos produits par ces rencontres à deux corps, selon toute vraisemblance, vont atteindre un état d'équilibre au travers d'une relaxation violente [101], avec des particules qui vont peupler équiprobablement l'espace des phases sous la seule contrainte des intégrales de mouvement. L'état stationnaire (d'équilibre) est ensuite identifié à l'état le plus probable, et peut être approximé, dans le cas où seules la masse et l'énergie sont conservées, par la construction d'un potentiel moyen dans lequel les particules de matière sombre ont une distribution de vitesse maxwellienne, avec une "température" proportionnelle à leur masse. Pour des particules de masses égales, cela entraîne que le profil de densité du halo, $\rho[r]$, est celui d'une sphère isotherme, c'est-à-dire $\rho[r] \propto r^{-2}$.

La situation est donc assez compliquée, avec toutefois cette propriété assez remarquable que le profil de densité d'une sphère isotherme semble une approximation assez correcte du profil de densité des halos, tout au moins dans une vaste région de leur extension spatiale.

Pour cette raison, et aussi parce que, dans ce cas très particulier, le calcul des propriétés des halos peut s'effectuer de manière complètement analytique, nous supposerons que le profil de densité post–effondrement de notre pertubation virialisée est celui d'une sphère singulière isotherme tronquée au rayon du viriel r_{vir}, soit :

$$\rho(r) = \begin{cases} \sigma^2/(2\pi G r^2) & \text{si } r \leq r_{vir} \ , \\ 0 & \text{si } r > r_{vir} \end{cases}$$

où σ est la vitesse de dispersion 1-D du halo. On peut alors relier le rayon maximal d'expansion r_m (calculé dans la section précédente), au rayon du viriel au moyen de la conservation de l'énergie et du théorème du viriel [12].

Comme le soulignent [102], le fait de considérer que le halo est tronqué, requiert une pression externe de confinement pour conserver un système en équilibre. Cette "pression", dans notre cas où les particules de matière sombre sont non–collisionnelles, provient du ré–arrangement des orbites de ces particules au sein du puits de potentiel gravitationnel [101]. Le théorème du viriel, pour une sphère statique confinée par une pression de surface externe S, s'écrit alors :

$$2K + U_G - 2U_\Lambda + S = 0 \tag{45}$$

avec K et U_G qui sont respectivement les énergies cinétique et gravitationnelle du halo. U_Λ est, pour sa part, l'énergie potentielle due à l'éventuelle présence d'une constante cosmologique [103].

Pour notre profil, les énergies potentielles et la pression de surface valent :

$$\begin{aligned} U_G &= -\frac{GM^2}{r_{vir}} \\ U_\Lambda &= -\frac{\lambda_0 H_0^2}{6} M r_{vir}^2 \\ S &= -\int\!\!\int_\Sigma \sigma^2 \rho(r) \vec{r} d\vec{S} = -\frac{GM^2}{2r_{vir}} \end{aligned} \tag{46}$$

[12] Le rayon du viriel étant, par définition, le rayon délimitant la région à l'intérieur de laquelle le halo est en équilibre du viriel.

donnant pour l'énergie cinétique :

$$K = \frac{3}{4}\frac{GM^2}{r_{vir}} - \frac{\lambda_0 H_0^2}{6} M r_{vir}^2 \tag{47}$$

Par simple conservation de l'énergie et de la masse entre le moment où la perturbation homogène (exposants H) atteint sa taille maximale, et celui où le halo final isotherme (exposants I) est virialisé, on peut écrire :

$$U_G^H + U_\Lambda^H = K^I + U_G^I + U_\Lambda^I \quad \text{soit}\,, \tag{48}$$

$$\frac{3}{5}\frac{GM^2}{r_m} + \frac{3\lambda_0 H_0^2}{10} M r_m^2 = \frac{1}{4}\frac{GM^2}{r_{vir}} + \frac{\lambda_0 H_0^2}{3} M r_{vir}^2 \tag{49}$$

ce qui entraîne que r_{vir}/r_m est solution de l'équation cubique suivante (voir [103] pour l'obtention de cette même équation pour un halo virialisé de densité uniforme) :

$$\frac{4\lambda_0 H_0^2 r_m^3}{3GM} x^3 - \left(\frac{12}{5} + \frac{6\lambda_0 H_0^2 r_m^3}{5GM}\right) x + 1 = 0 \tag{50}$$

Dans le cas où $\lambda_0 = 0$, la solution est 5/12, proche du 1/2 obtenu pour un halo final homogène.

Il est intéressant de noter que si l'on re–calcule la dispersion de vitesse du halo de la nouvelle expression obtenue pour l'énergie cinétique, soit,

$$\frac{3}{2}\sigma^2 = \frac{3GM}{4r_{vir}} - \frac{\lambda_0}{6} H_0^2 r_{vir}^2 \tag{51}$$

on s'aperçoit qu'elle diffère (du terme en λ_0) de celle déduite directement d'un profil de sphère singulière isotherme. En réalité, on peut même démontrer que la sphère singulière isotherme ne peut être une solution d'équilibre de l'équation de Poisson en la présence d'une constante cosmologique. Cependant, comme le terme en λ_0 est toujours très petit (pour des valeurs de Λ réalistes) en comparaison du terme gravitationnel, du moins aux échelles qui nous concernent [13], il peut être considéré comme un développement au premier ordre de la solution d'équilibre vraie par rapport à la solution d'équilibre existant dans un univers d'Einstein–de Sitter.

---

[13] Ce terme implique une correction de < 10 % pour des amas de galaxies de masse $10^{15} M_\odot$.

Finalement, la vitesse V_c d'une particule test se déplaçant sur une orbite circulaire dans la sphère isotherme est :

$$V_c = \sqrt{2}\sigma = \sqrt{\frac{GM}{r_{vir}} - \frac{2\lambda_0}{9} H_0^2 r_{vir}^2} \tag{52}$$

Notons que, récemment, Navarro et al. [104] ont mesuré un profil de densité universel pour les halos de matière sombre détectés dans leurs simulations numériques. Ce profil est moins pentu que celui de la sphère isotherme dans les régions centrales, et tombe plus brusquemment dans les régions externes. Nous donnons la formule exacte en section 6 où nous comparons également ce profil avec les simulations numériques de [105]. Ce profil universel est cependant controversé, et de toute manière incompris physiquement, et nous lui préfèrerons donc la sphère isotherme par la suite.

5 Croissance non–linéaire des fluctuations : description statistique semi–analytique

Dans la section 4, nous nous sommes attachés à décrire l'évolution d'un objet unique. Il faut maintenant passer à une description quantitative de la dynamique non–linéaire des perturbations de différentes tailles présentes dans l'univers, si l'on veut pouvoir comparer statistiquement les modèles aux observations. Cela ne peut être réalisé que numériquement (voir section 6). Mais on peut obtenir une estimation de la distribution des structures non–linéaires sans suivre la dynamique non–linéaire en détail. Plusieurs approches semi–analytiques ont été développées pour cela. Nous en retiendrons deux ici : une mathématiquement rigoureuse mais très rapidement complexe, dite théorie des pics, et l'autre, plus fragile mathématiquement, mais plus simple, nommée prescription de Press–Schechter, qui conduisent toutes deux à des résultats satisfaisants lorsqu'on les compare avec les résultats issus de simulation numériques haute–résolution (cf section 6).

5.1 Lissage du champ de fluctuations

Le concept clef est ici la notion de filtrage spatial à une certaine échelle R (et donc à une certaine masse M), qui permet de définir des perturbations sphériques et homogènes dont l'évolution est aisément calculable avec le formalisme précédent. Le contraste de densité est défini en tout point $\vec{x}$ comme :

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \rho_b}{\rho_b}, \tag{53}$$

et peut être filtré par une convolution avec un filtre à symétrie sphérique W_R :

$$\delta_R(\vec{x}) \equiv \delta \otimes W_R = \int \delta(\vec{y}) W_R(\vec{y}-\vec{x}) d^3\vec{y}, \tag{54}$$

Si le filtre utilisé est le "chapeau haut–de–forme" (*top hat*) :

$$W_R(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{si } |\vec{x}| < R \ , \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\},$$

on ramène la perturbation filtrée au cas simple de la section 4. Dans le "formalisme des pics" (voir ci-après), on envisage aussi un filtre gaussien :

$$W_R(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2R^2}\right). \tag{55}$$

La transformée de Fourier du contraste de densité s'écrit :

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int \delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}.\vec{x}) d^3\vec{x}, \tag{56}$$

et

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{\delta}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}.\vec{x}) d^3\vec{k}. \tag{57}$$

Le théorème de convolution donne alors :

$$\tilde{\delta}_R(\vec{k}) = \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{W}_R(\vec{k}), \tag{58}$$

où la transformée de Fourier de la fonction filtre vaut respectivement, pour les filtres *isotropes* "chapeau haut–de–forme" et "gaussien" (qui ne dépendent plus que de $x \equiv |\vec{x}|$ ou $k \equiv |\vec{k}|$) :

$$\tilde{W}_R(k) = \frac{3}{(kR)^3}(\sin kR - kR\cos kR), \tag{59}$$

$$\tilde{W}_R(k) = \exp\left(-\frac{(kR)^2}{2}\right). \tag{60}$$

Finalement, le théorème de Parseval donne la variance du champ lissé à l'échelle spatiale R :

$$\sigma(R)^2 =< \delta_R(\vec{x})^2 >= \frac{1}{8\pi^3} < |\tilde{\delta}_R(\vec{k})|^2 >= \frac{1}{8\pi^3} \int P(k) |\tilde{W}_R(k)|^2 4\pi k^2 dk, \tag{61}$$

si l'on suppose que le champ est isotrope, et en introduisant le spectre de puissance des fluctuations $P(k) \equiv |\tilde{\delta}(k)|^2$. Ce spectre est calculable avec la "fonction de tranfert" $T(k)$ comme $P(k) = Ak^nT(k)^2$, et $n = 1$ correspond au spectre primordial de Harrison Zel'dovich. Le facteur de normalisation A est calculé de façon à reproduire l'amplitude actuelle du contraste de densité observée aux échelles linéaires. La variance $\sigma_{8h^{-1}}$ sur une échelle (chapeau haut–de forme) de rayon $R = 8h^{-1}$ Mpc est de l'ordre de 1. Avec cette normalisation, la variance $\sigma(R)^2$ est la valeur linéairement extrapolée à $z = 0$.

5.2 Théorie des pics

Supposons que le champ de densité (à trois dimensions) des fluctuations initiales est gaussien, et a été généré selon un processus aléatoire, caractérisé par le spectre de puissance $P(k)$ décrit précédemment. Le principe du formalisme des pics [24] repose sur l'hypothèse que la distribution en masse des halos gravitationnellement effondrés (amas, galaxies) est reliée aux maxima locaux de ce champ de densité lissé à l'échelle correspondant à la masse de l'objet. C'est–à–dire que l'on suppose que ces maxima sont les lieux où l'objet s'effondre sur lui–même lorsque le contraste de densité du champ lissé à une échelle contenant sa masse atteint la valeur critique du modèle "haut–de–forme", δ_c (voir section 4).

Pour calculer la distribution finale, le spectre de puissance est d'abord normalisé à l'aide de σ_8, sa variance dans des sphères de rayon $R = 8h^{-1}$ Mpc, pour laquelle on a une mesure observationelle (champ de vitesse des amas par [106]). Le formalisme des pics utilise alors les moments du spectre de puissance lissé par un filtre gaussien [14] de taille caractéristique R_G, qui sont obtenus, à l'ordre m, grâce à :

$$\sigma_m(R_G)^2 = \frac{1}{8\pi^3}\int k^{2m}P(k)|\tilde{W}_{R_G}(k)|^2 4\pi k^2 dk, \tag{62}$$

où $\tilde{W}_{R_G}(k) = \exp(-(kR_G)^2/2)$ est la transformée de Fourier du filtre gaussien isotrope :

$$W_{R_G}(x) = \frac{1}{(2\pi R_G^2)^{3/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{2R_G^2}). \tag{63}$$

La distribution (comobile) du nombre de pics de hauteur $\nu \equiv \delta_{0G}/\sigma_0(R_G)$, ayant un contraste de densité δ_{0G} lissé à l'échelle R_G, est égale à :

$$\frac{\partial n_{pk}(R_G)}{\partial \nu}d\nu = n_{pk}(R_G)P(\nu, R_G)d\nu, \tag{64}$$

---

[14] On pourrait également envisager un lissage de type "haut–de–forme", qui serait plus intuitif physiquement, mais les calculs mathématiques deviennent alors plus hardus.

avec :

$$n_{pk}(R_G) = \frac{c_\infty}{4\pi^2 R_\star^3}, \tag{65}$$

$$P(\nu, R_G) = \frac{1}{c_\infty} \exp - \frac{\nu^2}{2} G(\gamma, \gamma\nu), \tag{66}$$

tel que $\int P(\nu, R_G) d\nu = 1$.

Les fonctions $R_\star$ et γ sont données par :

$$R_\star(R_G) \equiv \sqrt{3}\frac{\sigma_1(R_G)}{\sigma_2(R_G)}, \quad \gamma(R_G) \equiv \frac{\sigma_1^2(R_G)}{\sigma_0(R_G)\sigma_2(R_G)}. \tag{67}$$

La constante $c_\infty = 0.6397$ et un ajustement analytique de la fonction $G(\gamma, \omega)$ sont pris tels qu'ils sont définis par les équations 4.4 et 4.5 de [24].

Pour les modèles de référence auxquels on s'intéressera par la suite, $\Omega_0 = 1/0.33$, $h_0 = 0.5/0.67$, $\lambda_0 = 0/0.67$, et le spectre de puissance CDM, on a des variations faibles pour ces grandeurs sur l'ensemble des échelles ayant un intérêt pour la formation des galaxies : $0.4 < \gamma(R_G) \leq 0.8$ et $1.2 \leq R_\star(R_G)/R_G \leq 1.65$ pour $0.01 \leq R_G \leq 20$ Mpc.

Mais à ce point, nous n'avons pas encore la distribution en nombre des pics en fonction de leur contraste de densité et de leur rayon. Pour l'obtenir, il faut interpréter l'équation 65 comme la densité numérique totale de pics $n_{pk}(> R_G)$ aux échelles supérieures à R_G [107]. En dérivant l'équation 64, on obtient alors facilement :

$$\frac{\partial^2 n_{pk}}{\partial R_G \partial \nu} dR_G d\nu = -\frac{3\, d\ln R_\star}{R_G\, d\ln R_G} n_{pk}(R_G) P(\nu, R_G) dR_G d\nu \tag{68}$$

où l'on a négligé la variation de $\gamma(R_G)$ avec R_G. C'est la densité numérique de tous les pics.

Maintenant, il s'agit de compter tous les pics au–dessus d'un certain seuil ν_c, défini comme le seuil en ν au delà duquel la perturbation sphérique isolée précédemment décrite s'effondre. On obtient alors le taux de formation des halos :

$$\frac{\partial^2 n_{for}}{\partial R_G \partial \nu_c} dR_G d\nu_c = \frac{\partial}{\partial \nu_c}\left(\int_{\nu_c}^{\infty} \frac{\partial^2 n_{pk}}{\partial R_G \partial \nu} d\nu\right) dR_G d\nu_c. \tag{69}$$

Ou bien encore, après un changement de variables, et en notant que $\nu_c \equiv \delta_{0G,c}[1 + z_{coll}]/\sigma_0(R_G)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_{for}}{\partial \ln M \partial(1 + z_{coll})} &= -n_{pk}(> R_G) \frac{d\ln R_\star}{d\ln R_G} P(\nu_c, R_G) \\ &\quad \times \frac{1}{\sigma_0(R_G)} \frac{d\delta_{0G,c}[1 + z_{coll}]}{d(1 + z_{coll})}. \end{aligned} \tag{70}$$

Pour relier le lissage gaussien au formalisme de la perturbation "haut–de–forme", il suffit de remarquer, d'une part, que la masse comprise à l'intérieur d'un filtre gaussien est $M = (2\pi)^{3/2} R_G^3 \rho_b(t_0)$, de telle sorte que la relation entre R_G et un filtre "haut–de–forme" de rayon R_H enfermant la même masse M s'écrit $R_G = 0.64 R_H$, et d'autre part, que le contraste de densité $\delta_{0G,c} \equiv \delta_{0c}\sigma_0(R_H)/\sigma_0(R_G)$.

Le nombre total de pics s'étant effondrés en halos au décalage spectral z s'obtient alors par intégration de l'équation 70 sur tous les décalages spectraux supérieurs à z.

Comme on peut le remarquer sur la figure 3, le nombre de pics augmente avec le temps, quelle que soit la masse considérée. Cela est dû au fait que le formalisme des pics comptabilise l'effondrement de tous les pics, et compte comme deux objets differents un pic à grand contraste de densité et un pic plus large, à plus faible contraste de densité, dans lequel le premier pic est inclus. Ce problème, communément appelé *cloud–in–cloud problem*, conduit à une sur–estimation du nombre total d'objets de faible masse. De fait, le nombre total de pics de faible masse varie comme M^{-2}, ce qui entraîne une densité de masse totale divergeant comme le logarithme de la coupure à faible masse. Cependant, comme les processus astrophysiques baryoniques (voir section 7) vont naturellement introduire une coupure à faible masse (explosions de supernovae, photo–ionisation), cette lente divergence ne semble pas tellement problématique pour une analyse simplifiée du problème de la formation et de l'évolution des galaxies.

Notons qu'une méthode a été proposée pour résoudre ce problème, qui consiste à partitionner le champ de densité initial en un ensemble de régions disjointes qui ne formeront qu'un seul objet, et à calculer les propriétés statistiques de cette partition. Il en résulte des complications mathématiques assez rédhibitoires ([108], [109], [110]), et beaucoup de conclusions sont semblables à la méthode plus simple proposée ci–dessous.

5.3 Press-Schechter : l'approche "intuitive"

La prescription de Press et Schechter [23] peut être retrouvée grâce à un *ansatz* simple, mais manquant de rigueur mathématique. Nous en donnons un aperçu avant de passer à une description rapide de la méthode plus rigoureuse.

La question posée est celle de connaître la fraction de masse totale (dans un volume d'univers V représentatif) comprise à un redshift z dans des halos de masse M. Après lissage du champ de densité par une fenêtre "chapeau haut–de–forme" englobant la masse M, et en supposant que (i) le champ de fluctuation est aléatoire et gaussien, (ii) l'effondrement au–delà de z advient dès que le contraste de densité des fluctuations,

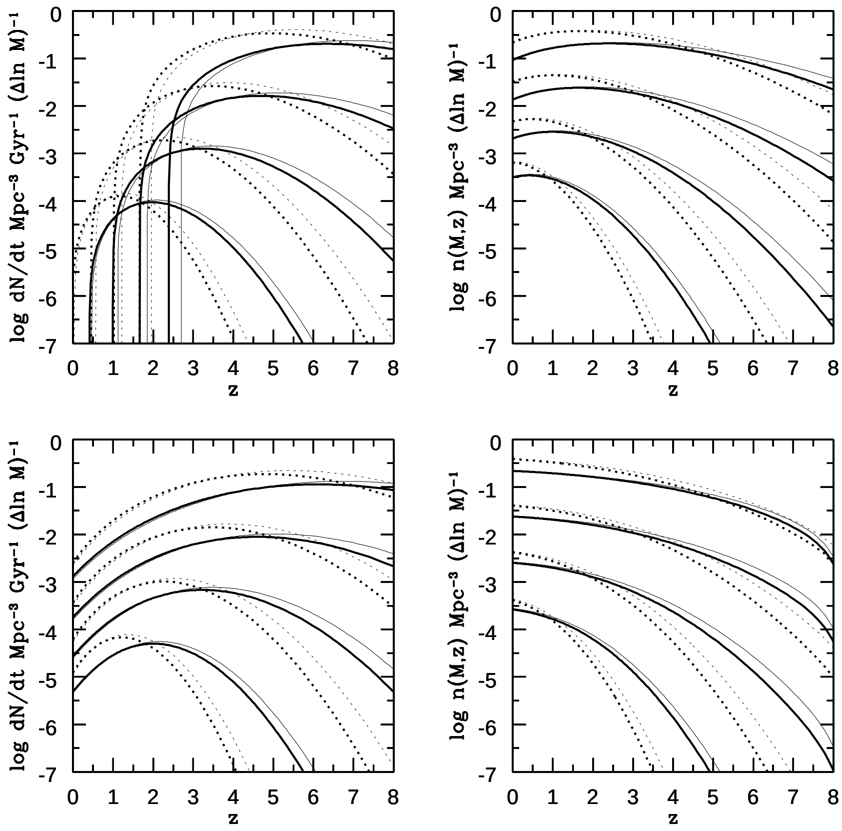

Figure 3. – Évolution du taux de formation (colonne de gauche), et du nombre total de halos formés (colonne de droite) pour la théorie des pics (vignettes du bas) et la prescription de Press–Schechter (vignettes du haut). Les courbes en pointillés sont pour une cosmologie CDM standard ($\sigma_8 = 0.51$, $\Omega_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$ et $H_0 = 50$ km s^{-1} Mpc^{-1}) et les courbes pleines pour une cosmologie ΛCDM ($\sigma_8 = 0.88$, $\Omega_0 = 1/3$, $\lambda_0 = 2/3$ et $H_0 = 67$ km s^{-1} Mpc^{-1}). L'effet de Ω_B, contenu baryonique de l'univers est illustré au travers de deux valeurs, zéro (trait fin) et 0.02 h_0^{-2} (trait épais). De plus, pour chaque modèle, sont tracées quatre courbes, représentant chacune des halos de masses différentes, qui valent, de bas en haut : 10^{13}, 10^{12}, 10^{11}, et 10^{10} $M_\odot$.

désormais *sphériques* et *homogènes*, dépasse le seuil critique (linéairement extrapolé à $z = 0$) $\delta_{0c}[1+z]$ (voir section 4), cette fraction vaut :

$$f(M,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\nu_z(M)}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\nu^2\right] d\nu \tag{71}$$

où $\nu \equiv \delta_0/\sigma_0(M)$ est la fluctation relative de densité, $\sigma_0^2(M)$ est la variance du champ, et $\nu_z(M) \equiv \delta_{c0}[1+z]/\sigma_0(M)$ correspond à un effondrement à z. Ici, toutes les grandeurs sont exprimées après avoir été linéairement extrapolées au temps actuel t_0, et les dimensions sont comobiles. Cette approche est d'un esprit assez similaire à la théorie des pics précédemment décrite, en ce sens qu'elle exploite les propriétés du champ gaussien aléatoire des fluctuations initiales pour en déduire la fonction de masse des objets virialisés. Il suffit alors de remarquer que le nombre d'objets par unité de volume dans un intervalle logarithmique de masse autour de $\ln M$ est simplement :

$$\begin{aligned} \frac{dn(M,z)}{d\ln M} d\ln M &\equiv \frac{\rho_0}{M}\left|\frac{df(M,z)}{d\ln M}\right| d\ln M \\ &= \frac{\rho_0}{M}\left|\frac{df(M,z)}{d\nu_z(M)}\right|\left|\frac{\nu_z d\ln\nu_z(M)}{d\ln M}\right| d\ln M \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\rho_0}{M}\nu_z(M)\exp\left[-\frac{1}{2}\nu_z(M)^2\right]\left|\frac{d\ln\sigma_0(M)}{d\ln M}\right| d\ln M \end{aligned} \tag{72}$$

où $\rho_0 \equiv \rho_b(t_0)$ est la densité moyenne actuelle de l'univers. L'intégrale de cette équation ne correspond qu'à la moitié de la masse. Il faut donc multiplier l'équation par le facteur 2 ad hoc (*fudge factor*), en argumentant que l'on n'a pas tenu compte ci-dessus de la matière des régions sous–denses. On obtient finalement la densité en nombre comobile de halos formés à un redshift z :

$$\frac{dn(M,z)}{d\ln M} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho_0}{M}\nu_z(M)\exp\left[-\frac{1}{2}\nu_z(M)^2\right]\left|\frac{d\ln\sigma_0(M)}{d\ln M}\right| \tag{73}$$

5.4 La prescription "étendue" de Press–Schechter

La théorie mathématiquement rigoureuse utilise les propriétés de la trajectoire suivie par le champ de densité au cours de lissages successifs à des échelles de masse de plus en plus fines [111]. Plus précisément, réécrivons le champ de densité aléatoire gaussien, $\delta(\vec{k})$, comme une fonction de sa variance à l'échelle M, $V = \sigma_0^2(M)$ [112]. L'univers étant supposé lisse à grande échelle, on a donc, $\lim_{M\to\infty} V = 0$ et $\lim_{M\to\infty} \delta(V) =$

0. Puis, au fur et à mesure que l'on diminue l'échelle de lissage, $\delta(V)$ s'écarte de 0 de telle sorte que sa valeur moyenne $< |\delta(V)|^2 >= V$ (*c.f.* figure 4).

Pour une réalisation particulière du champ de densité, c'est–à–dire un ensemble de $\delta(\vec{k})$ fixé, les trajectoires à chaque position $\vec{x}$ sont parfaitement déterminées. Considérons alors les trajectoires à position $\vec{x}$ fixée, pour différentes réalisations de $\delta(\vec{k})$. Du fait de la nature du champ, ces trajectoires deviennent des marches aléatoires. Grâce au théorème d'ergodicité, on peut affirmer que les propriétés statistiques des trajectoires calculées en moyennant sur les différentes réalisations du champ sont identiques à celles obtenues en moyennant sur l'espace réel.

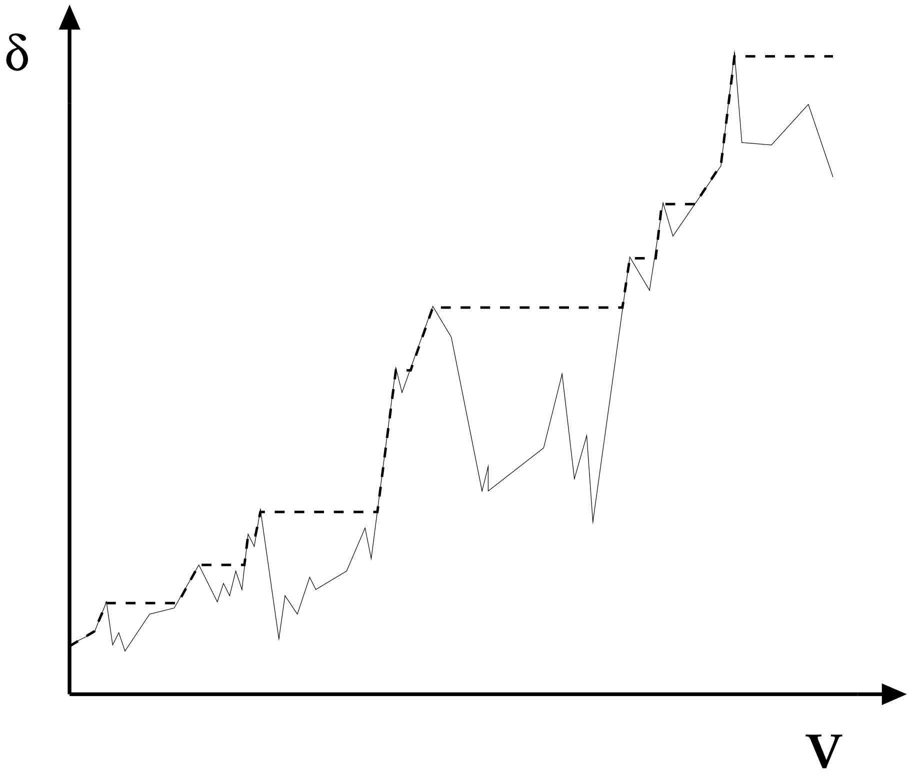

Figure 4. – Exemple d'évolution d'une trajectoire pour le contraste de densité δ, en fonction de l'échelle de lissage (courbe pleine). Est également représentée, sous la forme d'une fonction $V[\delta_c(t)]$, la trajectoire suivie par la masse du halo correspondant (tirets) à ce contraste (voir texte pour plus de détails). Lorsque le contraste de densité, δ, croît avec la variance V, les deux courbes coïncident.

Maintenant, et c'est là le point le plus faible de cette approche, ces propriétés vont dépendre explicitement de la forme du filtre choisi pour effectuer le lissage du champ. Dans le cas le plus simple d'un filtre "haut–de–forme" dans l'espace de Fourier (différent du *top hat* dans l'espace réel intervenant dans le raisonnement intuitif),

$$W_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq k_V(M) \\ 0 & \text{si } k > k_V(M) \end{cases},$$

les trajectoires sont des marches Browniennes aléatoires vraies, puisque chaque incrément à $\delta(V)$, quand $V(k_V)$ augmente, provient de modes de Fourier d'une couche sphérique différente, et n'est donc pas, dans le cas d'un champ gaussien aléatoire, corrélé avec les incréments précédents. Les trajectoires $\delta(V)$ obéissent alors à une simple équation de diffusion :

$$\frac{\partial D}{\partial V} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \delta^2} \tag{74}$$

où $D(\delta, V)$ est le nombre de trajectoires comprises dans l'intervalle $[\delta, \delta + \partial\delta]$ au "temps" V.

Pour obtenir la fonction de masse de nos objets virialisés, il faut calculer la fraction des trajectoires ayant franchi un certain seuil [15] $\delta_c(t)$, à une échelle de masse M donnée, et qui sont au–dessous de ce seuil pour les valeurs supérieures de M. En terme de nos variables, cela revient à identifier le nombre de trajectoires qui dépassent pour la première fois $\delta_c(t)$ entre V et $V + dV$.

Pour cela, il suffit de placer une barrière à $\delta_c(t)$, qui absorbe toute trajectoire tentant de la franchir. La solution (unique) de l'équation 74 est alors donnée par [113] :

$$D[\delta, V, \delta_c(t)]d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}}\left(\exp\left[-\frac{\delta^2}{2V}\right] - \exp\left[-\frac{(\delta - 2\delta_c(t))^2}{2V}\right]\right) d\delta \tag{75}$$

La probabilité PdV qu'une trajectoire particulière soit absorbée entre V et $V + dV$ devant être égale à la différence entre le nombre total de trajectoires avant et après passage de la barrière sur le nombre total de trajectoires avant passage de la barrière, on a donc :

$$\begin{aligned} P[V, \delta_c(t)]dV &= -\frac{\partial}{\partial V}\left(\int_{-\infty}^{\infty} D[\delta, V, \delta_c(t)]d\delta\right) dV \\ &= -\left[\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \delta}\right]_{-\infty}^{\infty} dV, \end{aligned} \tag{76}$$

[15] Ce seuil correspond au contraste de densité critique requis pour qu'une perturbation sphérique homogène s'effondre au temps t (voir section 4).

soit, en remplaçant D par son expression analytique (équation 75) :

$$P[V,\delta_c(t)]dV = \frac{\delta_c(t)}{\sqrt{2\pi V^3}} \exp\left[-\frac{\delta_c(t)^2}{2V}\right] dV \tag{77}$$

Cette dernière expression est celle de la fraction en masse de l'univers qui se trouve dans des halos dont la masse est comprise dans l'intervalle $[M, M+dM]$ correspondant à $[V, V+dV]$. La densité de halos de masse M présents au temps t s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dM}(M,t)dM &= \frac{\rho_0}{M} P(V,\delta_c(t)) \left|\frac{dV}{dM}\right| dM \qquad (78)\\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\delta_{0c}}{\sigma_0(M)} \left|\frac{d\ln\sigma_0}{d\ln M}\right| \exp\left[-\frac{\delta_{0c}^2}{2\sigma_0(M)^2}\right] dM \end{aligned}$$

où ρ_0 est la densité moyenne actuelle de l'univers, et où l'on a linéairement extrapolé δ_c et σ jusqu'à $z = 0$ (voir section 4). La dérivée par rapport au temps de cette équation est représentée sur la vignette en haut à gauche de la figure 3. Notons que contrairement à la théorie des pics, cette équation tient compte de la disparition des petits halos lorsqu'ils sont absorbés par des halos plus massifs. Aussi les taux de formation de halos de masses données représentés sur cette figure, s'annulent-ils brutalement et deviennent-ils négatifs à partir d'un certain z.

L'équation 78 est connue sous le nom de fonction de masse de Press–Schechter [23]. Tout le problème de cette méthode réside donc dans la détermination non–univoque de la fonction $V(M)$. Son principal avantage est de permettre de déterminer facilement la fonction de masse des progéniteurs des halos. En effet, la trajectoire $\delta(V)$ décrit l'histoire de fusion pour une particule donnée. Cela est bien illustré sur la figure 4 où la courbe en trait plein représente $\delta(V)$, et la courbe en pointillés l'histoire de fusion $V[\delta_c(t)]$ du halo correspondant. Les sauts horizontaux de la courbe en pointillés correspondent en effet à de brusques changements de la masse du halo, qui sont interprétés comme le résultat de la fusion entre deux objets distincts de masse comparable. Lorsque les courbes $\delta(V)$ et $V[\delta_c(t)]$ sont confondues, le halo "accrète" simplement de petites quantités de masse. Bien sûr, la distinction entre fusion et accrétion est artificielle, puisqu'elle dépend de la résolution ΔV à laquelle on regarde la trajectoire $\delta(V)$. On peut alors facilement déterminer la probabilité conditionnelle $P(V_1, \delta_{c1}|V_2, \delta_{c2})\ dV_1$ qu'une trajectoire $\delta(V)$ ayant franchi la barrière δ_{c2} à V_2 franchisse la barrière $\delta_{c1} > \delta_{c2}$ dans l'intervalle $[V_1, V_1 + dV_1]$, en remarquant que le problème diffère du précédent par un simple changement d'origine. On peut donc obtenir, par changement de variable dans l'équation 77 :

$$P(V_1, \delta_{c1}|V_2, \delta_{c2})dV_1 = \frac{\delta_{c1} - \delta_{c2}}{\sqrt{2\pi(V_1 - V_2)^3}} \exp\left[-\frac{(\delta_{c1} - \delta_{c2})^2}{2(V_1 - V_2)}\right] dV_1 \qquad (79)$$
$$\text{avec } (V_1 > V_2\,,\ \delta_{c1} > \delta_{c2})$$

Cette expression permet alors de calculer [112] la probabilité qu'un halo de masse M_1, à un instant t_1, fasse partie d'un halo de masse $M_2 > M_1$, à un instant $t_2 > t_1$ (voir section 6, figure 8 pour une comparaison directe avec les simulations numériques). Le résultat s'exprime commodément sous la forme d'une fraction de masse conditionnelle, f, par intervalle logarithmique de masse [114] :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\ln M_1} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sigma_0^2(M_1)\,(\delta_{0c1} - \delta_{0c2})}{(\sigma_0^2(M_1) - \sigma_0^2(M_2))^{3/2}} \left|\frac{d\ln\sigma_0(M_1)}{d\ln M_1}\right| \\ &\times\ \exp\left[-\frac{(\delta_{0c1} - \delta_{0c2})^2}{2(\sigma_0^2(M_1) - \sigma_0^2(M_2))}\right] \qquad (80) \end{aligned}$$

On peut également obtenir les expressions analytiques pour les taux de fusions entre objets de masses M_1 et M_2 en fonction du temps, ainsi que pour les distributions des temps de formation et de survie d'objets de diverses masses (voir par exemple [112]).

6 Croissance non–linéaire des fluctuations : description numérique

Nous montrons des exemples de simulations numériques de l'évolution temporelle du regroupement des particules de matière sombre froide, interagissant uniquement à travers la force de gravitation, sur les figures 5 et 6. Les deux modèles d'univers différents correspondant à ces images sont respectivement, un modèle Einstein–de Sitter, et un modèle où la courbure est également nulle, mais où la constante cosmologique est positive.

Les paramètres cosmologiques choisis pour les deux simulations sont résumés dans la table 2. Ces simulations comptent chacune $N_p = 256^3$ particules (environ 17 millions), réparties dans une boîte cubique d'arête $L_{box} = 100\ h_0^{-1}$ Mpc comobiles à l'échelle de laquelle l'univers est supposé homogène. De la sorte, la masse de chaque particule est simplement donnée par $\rho_0 L_{box}^3/N_p \simeq 3.3 \times 10^{10} M_\odot$ (univers Einstein–de Sitter) et $\rho_0 L_{box}^3/N_p \simeq 8.3 \times 10^9 M_\odot$ (univers plat avec constante cosmologique). Initialement ces particules sont distribuées sur une grille, de manière à ce que leur champ de densité soit une représentation particulière d'un

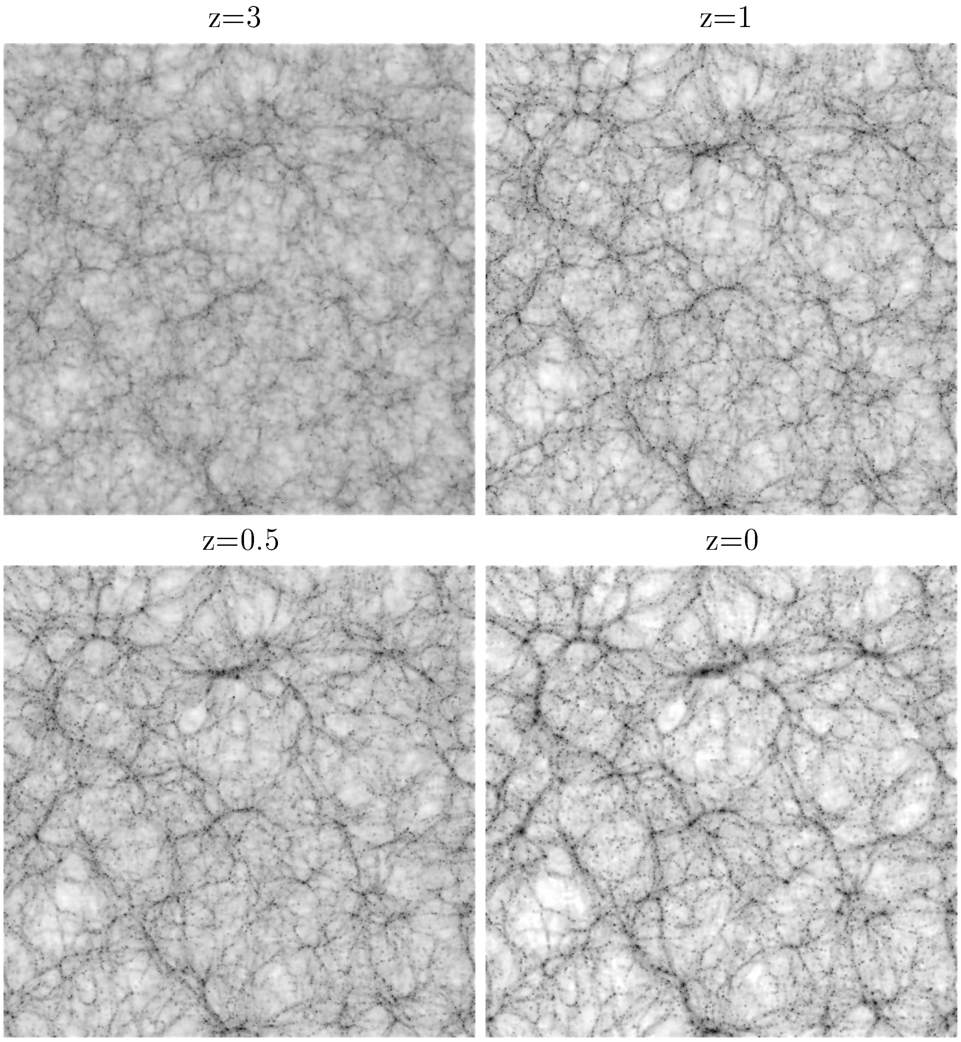

Figure 5. – Évolution du regroupement des particules de matière sombre froide dans une tranche lagrangienne (d'épaisseur 13 h_0^{-1} Mpc) d'un univers Einstein–de Sitter SCDM ($\Omega_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$, $h_0 = 0.5$ et $\sigma_8 = 0.51$). La taille de l'arête de la boîte cubique est de 100 h_0^{-1} Mpc. Les différents décalages spectraux sont indiqués sous chaque vignette. Simulation numérique réalisée par [105]. Images produites par Jérémy Blaizot.

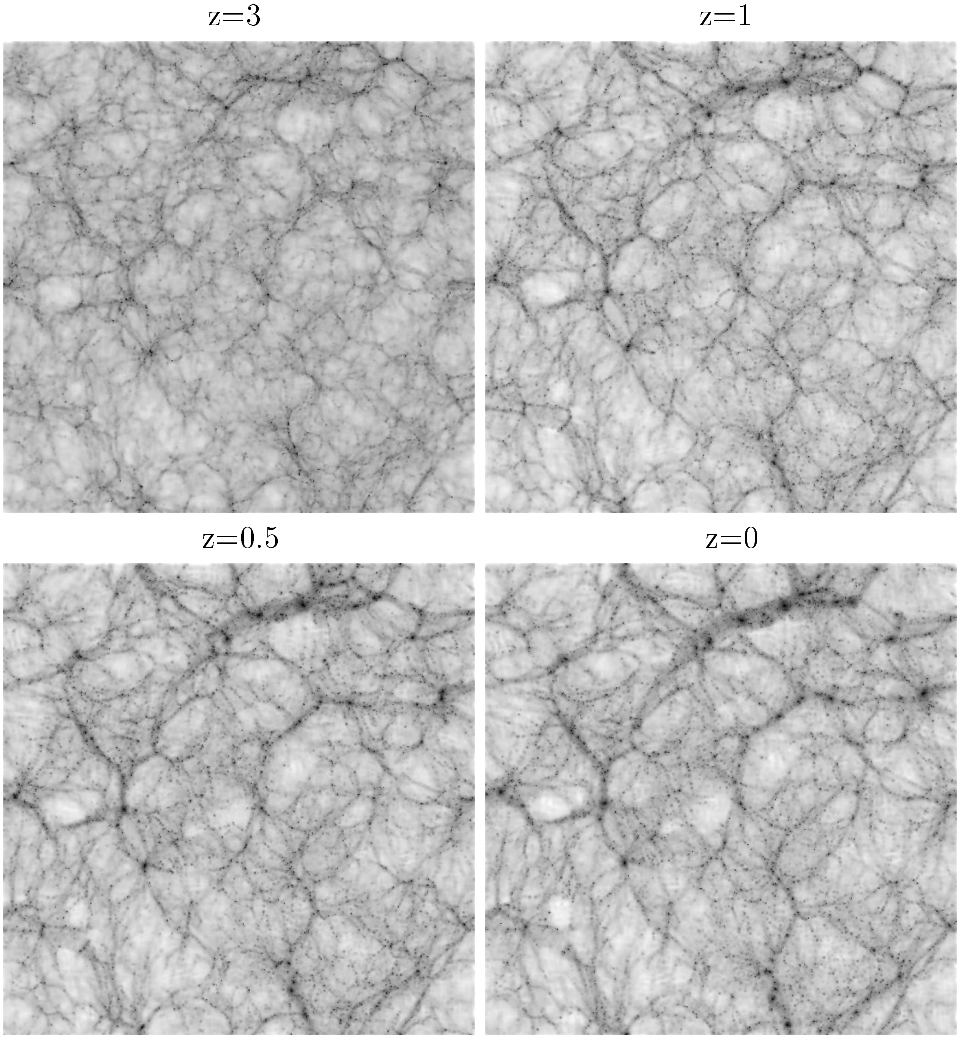

Figure 6. – Évolution du regroupement des particules de matière sombre froide dans une tranche lagrangienne (d'épaisseur 13 h_0^{-1} Mpc) d'un univers plat avec une constante cosmologique non–nulle ΛCDM ($\Omega_0 = 1/3$, $\lambda_0 = 2/3$, $h_0 = 2/3$ et $\sigma_8 = 0.88$). La taille de l'arête de la boîte cubique est de 100 h_0^{-1} Mpc. Les différents décalages spectraux sont indiqués sous chaque vignette. Simulation numérique réalisée par [105]. Images produites par Jérémy Blaizot.

Paramètres	Simulation SCDM	Simulation ΛCDM
Ω_0	1.0	1/3
λ_0	0.0	2/3
h_0	0.5	2/3
$\sigma_{8h_0^{-1}}$	0.51	0.88
Nombre de particules	256^3	256^3
Taille de la boîte [Mpc]	200	150
Masse d'une particule [$M_\odot$]	3.3×10^{10}	8.3×10^9
Décalage spectral initial	24.3	35.6
Résolution spatiale [kpc]	39.1	29.3
Temps de calcul consommé [h]	3.5×10^3	5.6×10^3

Table 2. – Paramètres cosmologiques et caractéristiques principales des deux simulations numériques discutées dans le texte.

champ de densité ayant des fluctuations gaussiennes et aléatoires [16]. Pour les conditions aux limites, la boîte a été répliquée à l'infini dans toutes les directions (conditions aux limites périodiques).

On fait ensuite évoluer les particules sous l'action de la gravité Newtonienne à l'aide d'un "code–en–arbre" parallèle (voir [105] pour les détails techniques concernant le code, et [116] pour l'algorithme), et qui est basé sur le principe général que l'on peut calculer la force gravitationnelle exercée sur une particule en ignorant la structure interne des groupes de particules distantes (voir [117] pour les détails de l'application à des simulations cosmologiques). Toutes les simulations présentées ici ont été réalisées par S. Ninin, et ont tourné sur le super–ordinateur CRAY–T3E (256 processeurs) du centre de calcul de l'Institut de Développement des Ressources Informatiques et Scientifiques (IDRIS).

Il faut ensuite trouver un moyen de repérer lorsqu'une structure (groupe de particules correspondant à un halo de matière sombre) se forme, ou, en d'autres termes, définir un critère d'appartenance qui permette d'identifier les particules membres d'un même groupe. Il n'y a malheureusement pas de méthode univoque pour accomplir une telle tâche.

[16] On fabrique pour cela un champ de densité initialement uniforme, sur la grille, puis on utilise l'approximation de Zel'dovich [115] pour calculer le déplacement (faible car on veut rester dans le régime linéaire) des particules par rapport à leur position originelle, et ainsi leur attribuer une vitesse.

Nous utilisons un simple algorithme de percolation, le FOF (de l'anglais *friend–of–friend*) qui consiste à considérer que les particules situées à moins d'une certaine distance d_{max} l'une de l'autre forment un groupe. En pratique, cela consiste à choisir une particule, à tracer une sphère de rayon d_{max} centrée sur elle, et à classer dans le même groupe les particules situées dans cette sphère. On réitère alors cette opération sur chacun des membres du groupe jusqu'à ce que plus une particule ne soit ajoutée. On passe ensuite à une autre particule de la simulation qui n'appartient encore à aucun groupe, jusqu'à ce que l'on ait classé toutes les particules de la simulation. Typiquement, la valeur utilisée pour d_{max} est de 0.2 fois la distance interparticulaire moyenne $L_{box}/N_p^{1/3}$, qui correspond, pour le groupe ainsi constitué, à une sur–densité (par rapport à la densité moyenne de la boîte) de l'ordre (~ 180) de celle prédite pour un halo sphérique virialisé dans l'approximation du "chapeau haut–de–forme" ($18\ \pi^2$ pour une cosmologie Einstein–de Sitter) décrite section 4.

Bien sûr, la plupart de ces "groupes", notamment au début de la simulation, lorsque la position des particules a peu varié, sont des singletons ou ne comportent que quelques particules. Il faut alors introduire un critère (assez arbitraire) de seuil au delà duquel un groupement de particules sera considéré comme un véritable halo de matière sombre, gravitationnellement lié. Le plus simple des choix est d'exiger qu'un groupe comporte un nombre minimal de $n_{min} = 20$ particules [17], c'est–à–dire ait une masse minimale de $6.8 \times 10^{11} M_\odot$ (SCDM) et $1.7 \times 10^{11} M_\odot$ (ΛCDM). Le problème principal de ce critère est qu'il ne change en rien la tendance inhérente à l'algorithme FOF de considérer comme un seul objet des groupes distincts qui interagissent, mais n'ont pas encore fusionné, simplement parce qu'un pont de particules les relie.

6.1 Fonctions de masse

Nous pouvons maintenant comparer (figure 7) les fonctions de masse obtenues pour les halos détectés en utilisant l'algorithme FOF précédemment décrit, avec celles prédites par les formalismes de Press–Schechter et des pics décrits dans la section 4. Nous nous restreignons ici au modèle d'univers avec constante cosmologique non–nulle, mais les résultats sont qualitativement similaires pour le modèle standard CDM.

Il faut tout d'abord noter que l'accord entre les prédictions analytiques et les mesures dans les simulations est remarquable, vu le trai-

[17] Ce nombre est obtenu de manière expérimentale en étudiant la stabilité de tels groupes. On peut en fait descendre jusque 10 particules en utilisant un critère supplémentaire faisant intervenir l'énergie (voir les sous–sections suivantes), mais tous les résultats que nous montrerons dans ce cours ont été établis avec des halos comptant 20 particules.

tement grossier de la dynamique non–linéaire qui est utilisé dans les modèles analytiques. Cependant, on peut remarquer que cet accord dépend à la fois de la gamme de masses et de l'instant considérés.

Plus précisément, la théorie des pics montre une tendance générale à sous–estimer le nombre de halos à grand décalages spectraux. Cette tendance est différente selon la masse des halos. Aux grandes masses ($> 10^{14} M_\odot$), la différence est faible, puis les pics sous–estiment le nombre de halos d'un facteur 2 à $z = 3$ aux masses intermédiaires et faibles (inférieures à $10^{13} M_\odot$). La croissance trop rapide du nombre de halos de faible masse dans la théorie des pics par rapport à la simulation est une parfaite illustration du *cloud-in-cloud problem*. En effet, dans cette théorie, on ne tient pas compte du fait que les pics de densité de petite taille qui ont fusionné pour donner naissance à des pics plus grands ont disparu, et donc, on finit par surestimer le nombre de petits halos produits car on compte les petits pics qui sont inclus dans les grands plusieurs fois. Cet effet cumulatif est particulièrement visible à $z = 0$. Enfin, notons qu'à résolution égale en masse, l'accord avec la simulation est meilleur dans un univers plat avec constante cosmologique non–nulle que dans le cas d'un univers Einstein–de Sitter.

La fonction de masse prédite par le formalisme de Press–Schechter, quant à elle, se rapproche de celle mesurée dans les simulations au fur et à mesure que le décalage spectral augmente, mais surestime en règle générale, le nombre de halos. Toutefois, là encore, la différence avec les simulations est fonction de la masse du halo. On peut cependant, à la différence de la théorie des pics, distinguer deux régimes (encore que cette distinction dépende quelque peu du modèle d'univers homogène sous–jacent choisi), celui des fortes masses (supérieures à $\sim 5 \times 10^{13} M_\odot$), où l'accord est plutôt satisfaisant, et celui des faibles masses ($< 5 \times 10^{13} M_\odot$) où l'on surestime (d'un facteur 1.5 au maximum) le nombre de halos. Ce comportement est également obtenu par d'autres auteurs utilisant des codes différents (par exemple [118]). Cependant, la surestimation des halos de masse vraiment faible ($< 10^{12} M_\odot$) à petit z est moins importante que dans le formalisme des pics.

L'avantage d'utiliser des simulations numériques, par rapport au formalisme analytique simple, est que l'on peut obtenir l'histoire complète de la formation d'un halo, à savoir le taux auquel il a accrété/perdu de la matière, ainsi que l'instant auquel il a fusionné avec d'autres groupes ou s'est fragmenté. Il suffit pour cela, une fois que l'on a identifié un groupe à un pas de temps donné de la simulation, de “suivre” chacune de ses particules aux pas de temps ultérieurs. On construit alors une sorte d'arbre généalogique pour chaque halo, ce que l'on appelle encore un arbre de fusion (pour l'algorithme voir [105]).

On peut alors s'intéresser (figure 8) aux fonctions de masse conditionnelles fabriquées en ayant recours à un tel arbre de fusion, c'est–à–dire à la distribution en masse qu'avaient les progéniteurs d'un halo avant de fusionner pour lui donner naissance. Par progéniteur nous entendons ici tout groupe de plus de n_{min} particules qui a cédé au moins une particule au halo sélectionné. Ces fonctions, déduites de l'arbre construit à partir de la simulation, sont comparées aux fonctions de masse conditionnelle prédites par la prescription de Press–Schechter étendue.

Pour des raisons de statistique et de résolution en masse limitée dans la simulation, la comparaison avec le formalisme de Press–Schechter étendu est possible uniquement pour des halos de masse intermédiaire (entre $10^{13}M_\odot$ et $10^{14}M_\odot$), et pour des différences relatives de décalages spectraux modérées. De manière non surprenante, le meilleur accord, quel que soit le modèle d'univers homogène sous–jacent considéré, est obtenu pour ces valeurs de masses (vignettes en haut à droite et en bas à gauche de la figure 8).

6.2 Moment angulaire

Nous montrons, sur la figure 9, les valeurs obtenues pour le paramètre de spin sans dimension des halos, qui résulte des forces de marée exercées sur ces halos par leur environnement (les autres halos). Ce paramètre de spin réduit λ, est défini par [119] à partir de l'énergie totale (cinétique et potentielle [18]) du groupe, E, sa masse, M, et son moment angulaire $\vec{J}$, quantités qui seraient conservées individuellement lors de l'effondrement gravitationnel non–dissipatif d'un système isolé :

$$\lambda = \frac{|E|^{1/2}|\vec{J}|}{GM^{5/2}} \tag{81}$$

avec G, constante universelle de gravitation.

Les différentes courbes représentées sur cette figure montrent clairement les limitations de l'algorithme FOF pour identifier les halos. On s'attend, pour un halo isolé, en équilibre sous l'effet de la force centrifuge engendrée par sa rotation (on a alors un système en forme de disque), à obtenir une valeur de λ de l'ordre de 0.4 [120]. Cependant, les distributions en trait plein contiennent une fraction non négligeable (environ 10 % à $z = 0$) d'objets ayant un λ supérieur à cette valeur qui devrait être une valeur maximale. Si l'on trace maintenant la même distribution, pour

[18] L'énergie potentielle des halos qui comportent moins de 50 particules est calculée par sommation directe, alors que, pour les halos plus massifs, on utilise l'approximation donnée par [102], pour un ellipsoïde homogène, en ayant vérifié au préalable qu'on retrouvait (à environ 10 % près) l'énergie potentielle calculée par sommation directe.

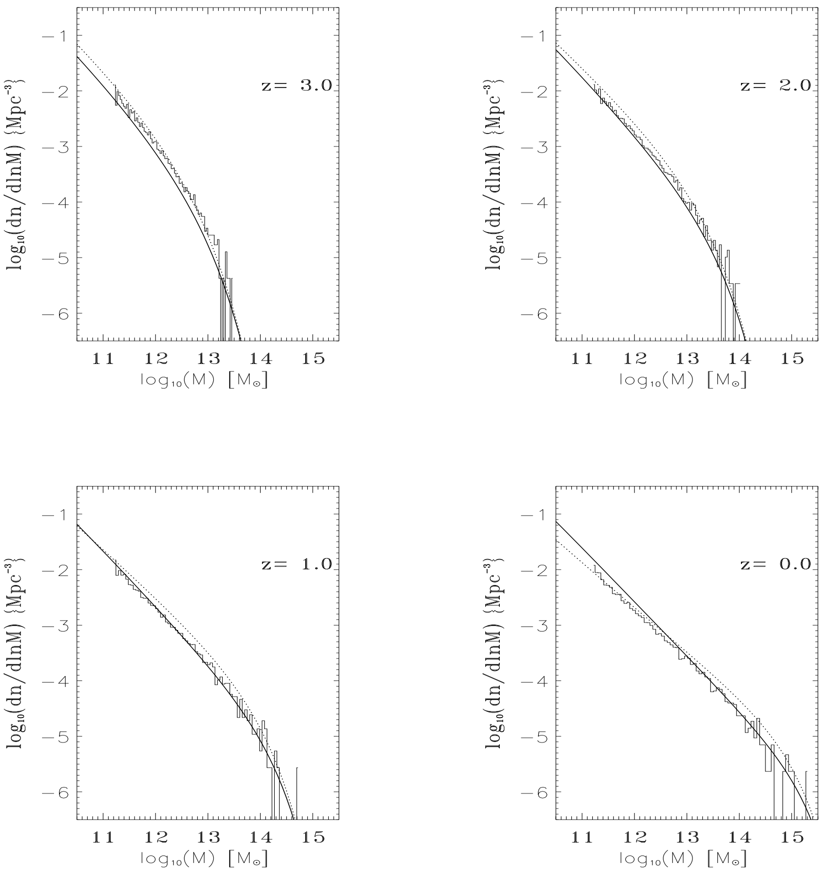

Figure 7. – Évolution de la fonction de masse des objets dans un univers ΛCDM plat avec constante cosmologique non nulle. La masse minimale d'un halo (20 particules) est de $1.7 \times 10^{11} M_{\odot}$. La courbe en trait plein représente la théorie des pics, les pointillés la prescription de Press–Schechter, et l'histogramme la fonction mesurée dans la simulation. Les différents décalages spectraux sont indiqués dans chaque vignette.

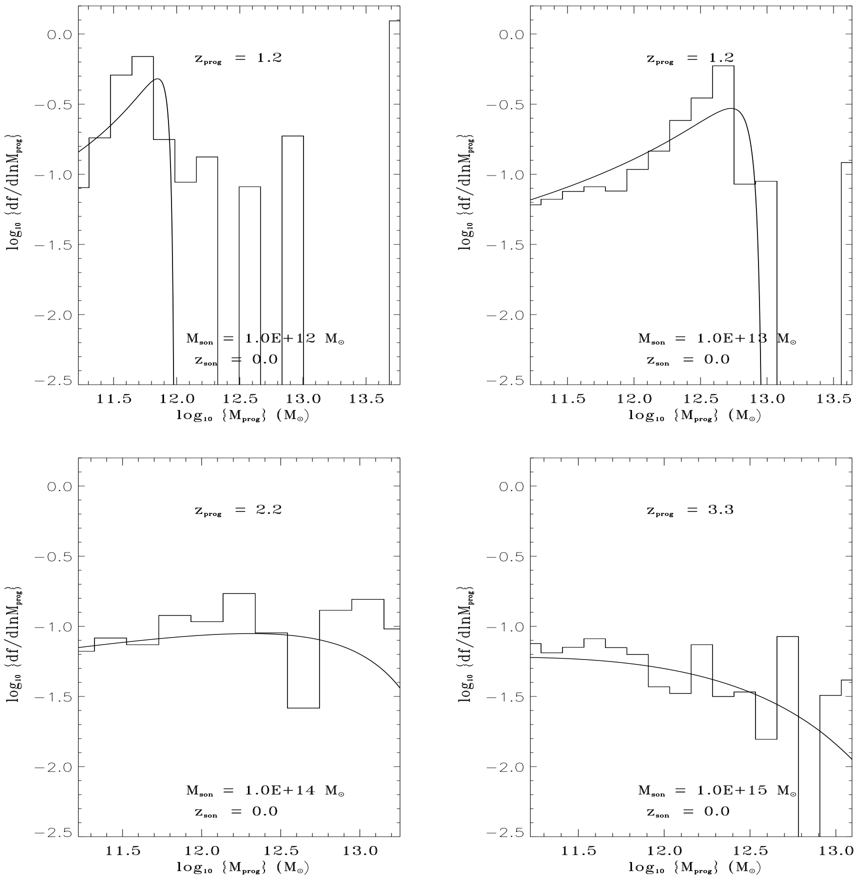

Figure 8. – Fonctions de masse conditionnelles pour des halos de matière sombre de différentes masses dans un univers plat ΛCDM avec constante cosmologique non–nulle. La courbe en trait plein représente la prescription de Press–Schechter étendue, et l'histogramme la fonction mesurée à partir de l'arbre construit à l'aide de la simulation. Les différents décalages spectraux, celui des progéniteurs comme celui du halo sélectionné, ainsi que la masse du halo sélectionné sont indiqués dans chaque vignette. La masse minimale d'un halo est de $1.7 \times 10^{11} M_{\odot}$.

des halos ayant une énergie totale positive (histogrammes pointillés), on s'aperçoit que cette distribution contient tous les halos avec un paramètre de spin réduit supérieur à 0.3. Cela s'interprète naturellement par le fait que deux halos en interaction (ou plus) ont été identifiés comme un seul objet. En effet, l'objet résultant a alors, en général, une énergie cinétique (mesurée par rapport à son centre de masse) supérieure à son énergie potentielle, c'est–à–dire une énergie totale positive, et un moment angulaire (toujours mesuré par rapport à un axe passant par son centre de masse) important qui va entraîner naturellement des valeurs de λ très élevées.

Les distributions du paramètre de spin réduit une fois ôté l'échantillon de halos non liés (d'énergie totale positive), représentées en tirets, sont à la fois robustes au niveau de leur évolution temporelle, en ce sens qu'elle ont des valeurs moyennes qui diffèrent de quelques pourcents seulement en fonction du décalage spectral, et essentiellement indépendantes du modèle cosmologique utilisé. De plus, aussi bien les valeurs moyennes $\lambda = 0.05 \pm 0.001$ que nous déduisons des simulations, que la largeur du pic (en loi log–normale) autour de ces valeurs ($\pm$ 0.03), sont en excellent accord avec les valeurs de [121] [19].

En ce qui concerne la dépendance de ces distributions par rapport à la valeur du paramètre de densité Ω au moment de l'effondrement, une étude plus détaillée que celle présentée est nécessaire pour confirmer/infirmer l'estimation analytique de [120], vu la faiblesse de l'effet ($\lambda \propto \Omega(z_{coll})^{0.1}$). De même, les distributions ne dépendent quasiment pas de l'environnement, ni de la masse.

6.3 Information spatiale

Une autre possibilité que nous offrent les simulations numériques est d'utiliser l'information spatiale détaillée qu'elles contiennent à propos des groupes détectés (on peut également faire la même étude pour le champ de densité de matière sombre froide, mais on s'intéressera ici uniquement aux halos de matière sombre). En particulier, on peut étudier l'évolution de la fonction de corrélation à deux points de ces halos pour la comparer à celle qui est mesurée, par exemple, pour les galaxies.

Dans un univers statistiquement homogène, la probabilité dP de trouver un halo centré dans un élément volume dV choisi au hasard est simplement proportionnelle à la taille de cet élément de volume :

$$dP = ndV$$

[19] Ces auteurs utilisaient pourtant un code différent (P^3M) pour calculer les interactions gravitationnelles, un algorithme légèrement différent du FOF pour identifier leurs halos, et n'avaient que 32 768 particules à comparer à nos 17 millions

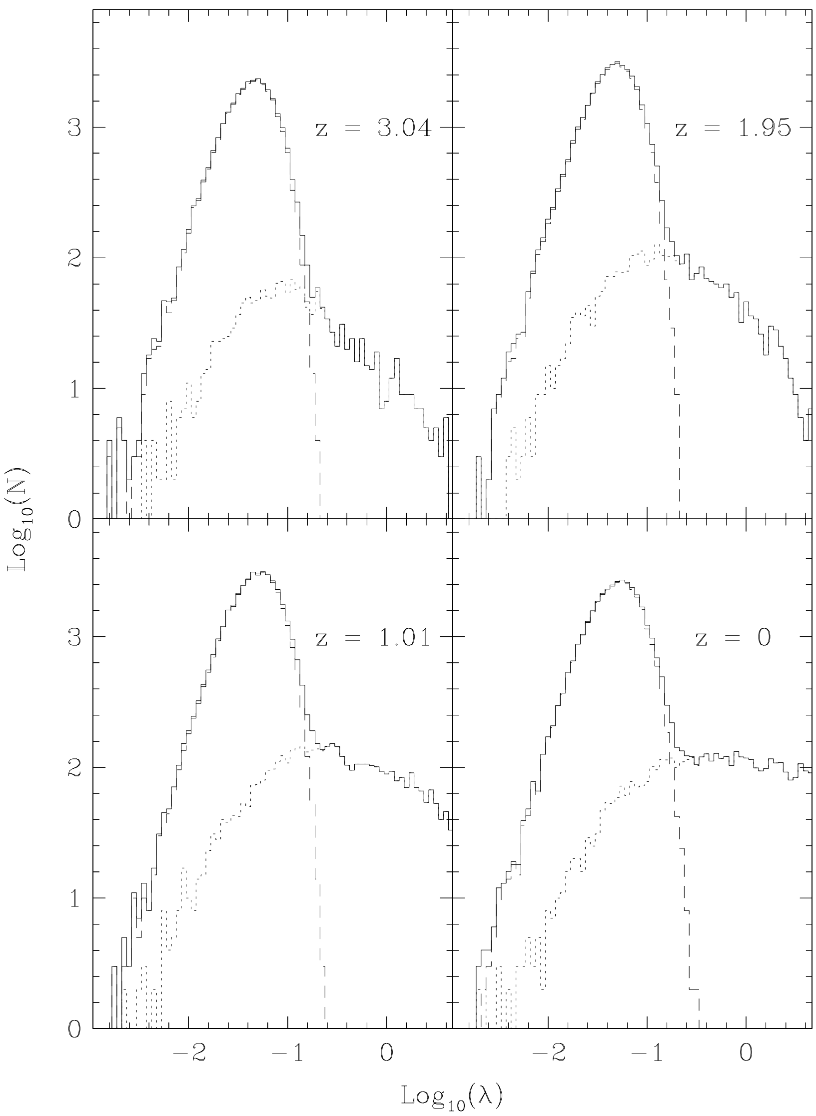

Figure 9. – Évolution du paramètre de spin réduit des halos de matière sombre dans un univers plat ΛCDM avec constante cosmologique non nulle. L'histogramme en trait plein montre la distribution complète, celui en pointillés, la distribution des halos ayant une énergie positive, et celui en tirets, la distribution des halos ayant une énergie négative. Les différents décalages spectraux sont indiqués dans chaque vignette.

où n est la densité de halos, qui est, par hypothèse d'homogénéité spatiale, constante.

La probabilité dP de trouver simultanément un halo centré dans un volume dV_1 situé autour d'un point $\vec{r_1}$ et un autre halo centré dans un volume dV_2 situé autour de $\vec{r_2}$ s'écrit, dans le cas le plus général :

$$dP = n^2(1 + \xi(\vec{r_1}, \vec{r_2}))dV_1 dV_2$$

où $\xi(\vec{r_1}, \vec{r_2})$ est appelée fonction de corrélation à deux points. Si l'univers est isotrope, cette fonction de corrélation ne dépend en fait que de la distance r_{12} entre les points $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$, d'où :

$$\xi(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = \xi(r_{12})$$

On voit immédiatement que, si les distributions des halos 1 et 2 sont indépendantes, alors $\xi(r_{12}) = 0$.

La fonction de corrélation à deux points mesure donc l'excès (ou le défaut) de regroupement des halos par paires dans une distribution donnée, par rapport à une distribution aléatoire (poissonienne). Par conséquent, pour avoir une mesure de cette fonction de corrélation dans les simulations, il suffit de compter le nombre de paires de halos où les partenaires sont situés à une certaine distance l'un de l'autre, et de diviser par le nombre moyen de paires séparées par la même distance que l'on attend pour une distribution spatiale aléatoire de halos (aucun estimateur sophistiqué n'est requis car il n'y a pas de biais de sélection dans les simulations). Nous présentons de telles mesures sur la figure 10.

7 Processus baryoniques

A partir des mesures/modèles précédents décrivant le comportement de la matière sombre non-collisionnelle, il est possible d'implémenter une description semi-analytique détaillée des processus baryoniques qui régissent la formation et l'évolution des galaxies à proprement parler.

7.1 Chauffage et refroidissement du gaz

La première hypothèse de ces modèles semi–analytiques consiste à supposer qu'une fraction universelle (Ω_B/Ω_0) de gaz, sous forme de 75 % d'Hydrogène et de 25% d'Hélium en masse[20], se retrouve piégée dans chaque halo de matière sombre. Il n'y a donc pas de ségrégation entre matière sombre et matière baryonique.

[20] Ces proportions sont celles prédites par la théorie de la nucléosynthèse primordiale se déroulant quelques secondes après le *Big Bang*.

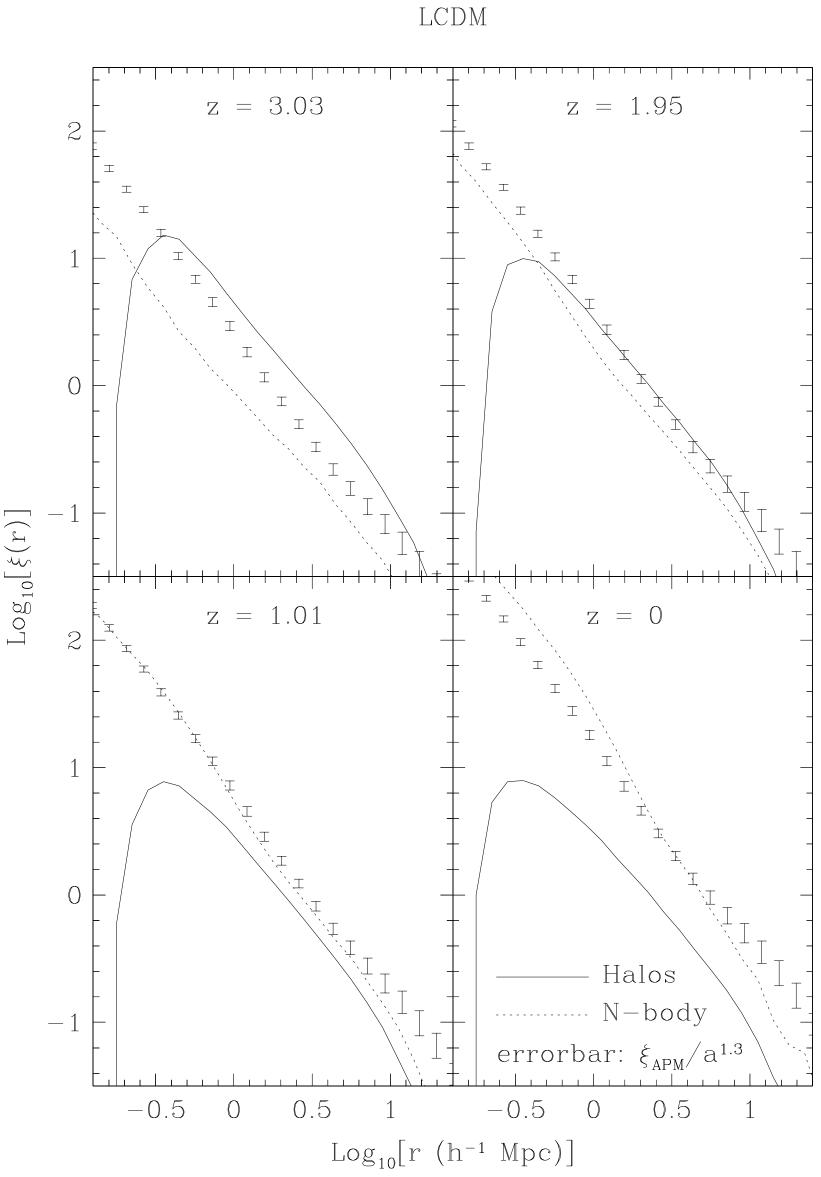

Figure 10. – Évolution de la fonction de corrélation à deux points des halos de matière sombre dans un univers plat ΛCDM avec constante cosmologique non nulle. La courbe en trait plein représente la fonction de corrélation pour tous les halos, et celle en pointillés, la fonction de corrélation pour les halos dont la masse est supérieure à $10^{12} M_{\odot}$. Les données sont celles du catalogue APM [90] pour les galaxies à $z = 0$, corrigées ainsi que mentionné dans le texte.

A l'issue de la virialisation qui intervient après l'effondrement gravitationnel du halo (*cf.* section 4), ce gaz est alors complètement ionisé par les collisions entre atomes dues aux ondes de choc occasionnées par ce processus de relaxation. La matière sombre et les baryons voyant le même puits de potentiel, on adoptera un profil de densité identique pour ces deux composantes, celui d'une sphère isotherme tronquée au rayon du viriel du halo de matière sombre (voir section 4). On admettra également que le gaz est en équilibre thermodynamique à la température du viriel

$$T_{vir} = \frac{\mu m_p}{2k_B} V_c^2 \tag{82}$$

où μ est le poids moléculaire moyen ($\mu \simeq 0.57$ pour un gaz ionisé composé de 75% d'Hydrogène et 25 % d'Hélium en masse), m_p la masse du proton, et k_B la constante de Boltzmann. En toute rigueur, il s'agit là de deux approximations, une très bonne pour les profils de densité et une autre moins correcte pour la température. En effet, les simulations numériques d'un amas de type Coma prédisent des pentes indiscernables pour les profils de densité du gaz et de la matière sombre dans la région virialisée [122]. En revanche, la température électronique, est en générale différente de la température ionique : les mêmes simulations prédisent une température des électrons 20 % plus faible que celle des ions au niveau du rayon du viriel, mais on négligera cet écart dans la discussion qui suit.

Le gaz refroidit alors radiativement, et tombe dans le puits de potentiel du halo, avec une échelle de temps caractéristique t_{cool} qui dépend de sa position initiale r.

$$t_{cool}(r) = \frac{3}{2}\frac{n_{tot}(r)k_B T_{vir}}{n_e^2(r)\Lambda(T_{vir})} = \frac{192}{49}\pi G m_p^2 \frac{\Omega_0}{\Omega_B}\frac{r^2}{\Lambda(T_{vir})}, \tag{83}$$

où les profils de densité du gaz n_{tot} et des électrons n_e sont ceux de la sphère isotherme (à la température du viriel) et $\Lambda(T)$ est la courbe de refroidissement à l'équilibre. Cette courbe de refroidissement tient compte de tous les processus atomiques disponibles pour refroidir le gaz, tels que les transitions électroniques entre états liés, libres–liés et le rayonnement de freinage. En particulier, elle dépend du contenu du gaz en ions métalliques.

L'équation $t_{cool}(r_{cool}) = t(z)$ ($t(z)$ étant l'âge de l'univers au décalage spectral z) définit donc une relation implicite entre le rayon de refroidissement r_{cool} (avec $r_{cool} = r_{vir}$ si $r_{cool} > r_{vir}$) à l'intérieur duquel le gaz a pu refroidir, et le décalage spectral. Notons que l'on a supposé implicitement, dans le raisonnement qui précède, que la vitesse du flot à l'intérieur de la région qui peut refroidir est subsonique (c'est–à–dire petite devant

$(3k_B T_{vir}/\mu m_p)^{1/2}$), condition nécessaire à la validité d'un tel traitement (on ne considère pas les chocs).

7.2 Collapse dissipatif

Comme discuté dans la section 6, les halos virialisés ont un moment angulaire acquis par effet de marée. Il faut donc avoir recours aux simulations numériques pour en estimer la distribution, car la théorie linéaire ne permet pas d'en obtenir une bonne approximation du fait qu'il est en partie transferé aux régions extérieures lorsque plusieurs halos fusionnent pour n'en former plus qu'un.

Cependant, comme mentionné dans la section 6, cette distribution dépend très peu du modèle cosmologique considéré (univers ouvert, plat ou fermé), du spectre de puissance des fluctuations initiales ou encore de l'environnement (dense ou sous-dense) dans lequel se situe un halo. On peut donc adopter comme distribution du moment angulaire $\vec{J}$ dans les modèles semi–analytiques pour la matière sombre décrits en section 5, ou, plus précisément comme distribution du paramètre de spin réduit, $\lambda \equiv |\vec{J}||E|^{1/2}/(GM^{5/2})$ (E est l'énergie totale du halo de masse M), une distribution log–normale, ayant une valeur moyenne $\lambda \simeq 0.05 \pm 0.03$, qui est un bon ajustement de la distribution mesurée dans les simulations numériques à N–corps (*cf.* section 6).

L'hypothèse suivante est que la chute du gaz s'arrête dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation du halo, lorsque la force centrifuge équilibre la force gravitationnelle. Dans la direction parallèle à l'axe de rotation, en revanche, l'effondrement continue, et l'énergie gravitationnelle se transforme en énergie cinétique macroscopique qui se dissipe dans des chocs pour être ensuite évacuée par radiation. Si, par hypothèse, il n'y a pas de formation d'étoiles pour "réchauffer" ou perturber le milieu, la structure finale engendrée est un disque froid, mince, et en rotation [123].

On peut alors montrer que (voir [28]), au vu du profil de luminosité exponentiel observé [124] pour de tels disques, si l'échelle de temps caractéristique de redistribution du contenu gazeux est très grande devant l'échelle de temps caractéristique de formation d'étoiles, le profil initial du gaz doit être lui aussi exponentiel ([125] et [126]).

Nous adoptons donc par la suite un profil de densité surfacique exponentiel d'échelle caractéristique r_d pour notre disque infiniment mince, et tronqué au rayon r_t, tel que :

$$\Sigma(r) = \begin{cases} \Sigma(0)\exp(-\frac{r}{r_d}) & \text{pour } r \leq r_t \ , \\ 0 & \text{pour } r > r_t \end{cases}$$

où r_t est défini comme la valeur minimale entre le rayon du viriel, r_{vir}, et $f_c r_d$. Le paramètre libre f_c est totalement empirique, et reflète le fait observationnel que le rayon de troncature du gaz est généralement plus grand que le rayon de troncature optique. Une valeur moyenne $f_c \simeq 6$ semble se dégager des observations de [127]. En supposant maintenant, à l'instar de [28], que le moment angulaire spécifique, $\vec{J}/M$, du gaz formant le disque est identique à celui du halo de matière sombre, et que, de plus, il est conservé au cours du temps, on peut relier l'échelle exponentielle du disque, r_d, à r_{vir} (voir [125] et [126] pour une discussion plus détaillée de ces hypothèses), selon :

$$r_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda r_{vir} \times \left(1 - \frac{f_c^2 \exp(-f_c)}{2\left[1 - (1 + f_c)\exp(-f_c)\right]} \right)^{-1} \tag{84}$$

Il faut souligner que, dans le cadre défini jusqu'à maintenant, on ne peut former que des disques. La formation des galaxies elliptiques, ainsi que celle des bulbes sphéroïdaux des galaxies spirales, doit donc être expliquée soit par des instabilités du disque, soit par la fusion de ces disques. Des simulations numériques détaillées [128], étayées par des observations directes réalisées à l'aide du télescope spatial Hubble (voir par exemple [129]), ont montré que les produits finals de collisions de disques de masses similaires ressemblent à des systèmes tels que les galaxies elliptiques ou les bulbes et que les processus d'instabilité peuvent également engendrer des bulbes [132]. En outre, les modèles semi–analytiques ([130] et [131]) ont montré, que ces processus pouvaient facilement rendre compte de l'abondance relative galaxies elliptiques / galaxies spirales en fonction de leur environnement et de leur luminosité. Bien entendu, une fois le système sphéroïdal formé par fusion, du gaz peut refroidir pour former un nouveau disque autour de ce système si le disque précédent a été entièrement détruit. De fait, la seule difficulté à résoudre pour valider complètement un tel scénario est de montrer dans le détail qu'il produit une population d'objets qui ont la régularité observée, et, plus particulièrement, que ces objets suivent le "plan fondamental", relation qui relie leur taille, luminosité, et dispersion de vitesse avec une dispersion remarquablement étroite (voir les observations de [133]). Néanmoins, de récentes simulations à haute résolution [134] laissent penser que cela semble effectivement être le cas.

7.3 Formation des étoiles

Revenons maintenant à nos disques. Si l'on tient pour négligeables les effets d'une quelconque viscosité effective (due à la turbulence du milieu interstellaire), l'unique échelle de temps à notre disposition pour former des étoiles est l'échelle de temps dynamique du disque, $t_{dyn} \equiv 2\pi r_d/V_c$, c'est–à–dire le temps mis par du gaz situé au niveau du rayon exponentiel caractéristique pour faire un tour de disque. Guidé par les observations

[135], on définit alors de manière phénoménologique un paramètre d'efficacité β^{-1}, qui contient toute notre ignorance des processus physiques gouvernant la formation d'étoiles à l'échelle locale. On modélise le taux de formation d'étoiles global, à l'échelle du disque, par la simple loi :

$$\frac{dM_*}{dt} = \frac{M_g(t)}{\beta t_{dyn}}, \tag{85}$$

où $M_g(t)$ est la masse totale de gaz du disque au temps t. Reste alors à répartir la masse d'étoiles ainsi formée en étoiles de différentes masses. On suppose donc, par souci de simplicité, que cette fonction de masse initiale (FMI) $\phi(m)$ est universelle, et suit une loi dite de Salpeter [136], telle que :

$$\phi(m) \propto m^{-2.35}\,, \text{ avec } \int_{m_d}^{m_u} m\phi(m)dm = 1\,. \tag{86}$$

sur une domaine de masse compris entre $m_d = 0.1\,M_\odot$ (masse minimale nécessaire pour amorcer la fusion nucléaire de l'hydrogène au cœur de l'étoile) et $m_u = 120\,M_\odot$ (masse maximale possible d'une étoile stable [21]). On gardera cependant présent en mémoire que cette fonction de masse initiale diffère à deux points de vue de celle mesurée dans le voisinage du soleil [137]. La FMI locale semble avoir une pente plus forte au niveau des étoiles massives, et devenir ostensiblement plus plate au dessous d'une masse solaire. Cependant, si la tendance à petite masse semble robuste, il existe une grande dispersion des données, d'amas globulaire à amas globulaire, pour les grandes masses, où une pente comprise dans l'intervalle [-3, -2] est compatible avec les observations [138]. La fonction de masse de Salpeter représente donc un choix conservateur.

7.4 Processus de rétroaction

Les étoiles massives (typiquement de masse supérieure à 8 $M_\odot$) explosent dans les galaxies, éjectant du gaz chaud et des métaux dans le MIS, mais aussi dans le halo de matière sombre et le milieu inter–galactique (MIG). Cette section propose une modélisation simple de tels phénomènes.

Vents galactiques. La modélisation de ce processus est inspirée du travail de [30]. Selon ces auteurs, il existe une vitesse de dispersion critique, au delà de laquelle la perte d'énergie des résidus de supernovae par radiation empêche une fuite catastrophique du gaz.

---

[21] L'incertitude théorique sur cette valeur est telle que cette masse maximale pourrait être revue à la baisse d'un facteur ~ 2.

Pour rendre compte de ce phénomène, considérons l'énergie de liaison moyenne d'une masse de gaz $M_g(t)$, au temps t, distribuée dans un disque exponentiel tel qu'il a été défini précédemment au temps t. En négligeant l'auto–gravité du disque, ou, ce qui revient au même, en considérant que seul le halo de matière sombre crée le puits de potentiel gravitationnel, on peut montrer que cette énergie s'écrit :

$$< M_g(r,t)\Phi(r) >_r \simeq M_g(t)\frac{1}{2}\left[V_c^2 + V_{esc}^2(r_t)\right], \tag{87}$$

où $\Phi(r)$ est le potentiel gravitationnel généré par une sphère isotherme singulière de matière sombre, tronquée au rayon de viriel r_{vir}, et

$$V_{esc}(r) = V_c\left[2\left(1 - \ln\frac{r}{r_{vir}}\right)\right]^{1/2}, \tag{88}$$

est la vitesse d'échappement au rayon r.

L'énergie totale $E_{tot}(t)$, accumulée par les explosions de supernovae jusqu'au temps t est, quant à elle :

$$E_{tot}(t) = \eta_{SN} E_{SN} M_*(t), \tag{89}$$

où η_{SN} est le nombre de supernovae formées par unité de masse d'étoiles produites, et dépend de la FMI (pour une FMI de Salpeter, qui est celle que nous avons choisie, $\eta_{SN} = 7.4\ 10^{-3}\ M_\odot^{-1}$). $E_{SN} \sim 10^{51}$ erg est l'énergie produite par une supernova, et $M_*(t)$ est la masse totale d'étoiles ayant été formées jusqu'au temps t.

Pour tenir compte du fait qu'une fraction de cette énergie est perdue sous forme de radiation, on insère alors un second facteur d'efficacité, $0 \leq \epsilon_{SN} \leq 1$ pour obtenir la fraction d'énergie effectivement injectée dans le MIS sous forme d'énergie cinétique. Cela permet donc d'écrire le bilan d'énergie au moment t_W où le vent galactique se déclenche, sous la forme :

$$\epsilon_{SN} E_{tot}(t_W) = < M_g(r,t_W)\Phi(r) >_r . \tag{90}$$

La fraction d'étoiles F_* qui se forme avant le déclenchement du vent est donc :

$$F_\star \equiv \frac{M_*(t_W)}{M_*(t_W) + M_g(t_W)} = \frac{1}{1 + (V_{hot}/V_c)^2}, \tag{91}$$

avec

$$V_{hot} \equiv \left[\frac{2\eta_{SN} E_{SN} \epsilon_{SN}}{1 + (V_{esc}(r_t)/V_c)^2}\right]^{1/2} \tag{92}$$

Nous avons négligé d'éventuels effets dynamiques sur la galaxie, conséquents à cette perte de masse, mais cela est cohérent avec notre hypothèse d'un halo de matière sombre dominant.

La dépendance de V_{hot} par rapport à r_t est faible, au vu de l'équation 88. L'incertitude principale dans la détermination de F_* vient donc de notre méconnaissance sur la capacité des résidus de supernovae à refroidir radiativement avant le déclenchement du vent galactique. Des simulations numériques détaillées de ce processus [139] semblent suggérer une valeur du paramètre $\epsilon_{SN} \simeq 0.1$.

Bien sûr, en réalité, la situation est plus complexe, notamment pour les galaxies de faible masse, car on doit alors tenir compte de processus non locaux qui peuvent diminuer ou stopper la formation d'étoiles. Par exemple, [140] et [141] ont montré qu'une réionisation du milieu inter–galactique à grand décalage spectral (la source de ce rayonnement ionisant restant à déterminer) empêche tout refroidissement de gaz dans les halos de matière sombre ayant des vitesses circulaires $V_c < 20 - 50$ km.s^{-1}, et pouvant atteindre jusque $\sim (200)^{1/3}$ fois cette valeur en cas d'effondrement adiabatique de la sphère de gaz ! Cela entraîne que la formation des galaxies naines est vraisemblablement sensible à l'histoire thermique du MIG. Dans tous les résultats présentés dans ce texte, cet effet n'est pas pris en compte.

Nucléosynthèse stellaire. Les étoiles polluent également le MIG en éjectant les métaux (éléments plus lourds que l'hélium) qu'elles synthétisent par fusion nucléaire, dans des vents stellaires puis, pour les plus massives ($\geq 8\ M_\odot$), en explosant en supernovae, alors que leurs consœurs moins massives éjectent moins violemment leurs couches externes pour engendrer des nébuleuses planétaires.

Suivre ces éléments lourds est d'une importance capitale car ce sont à partir d'eux que vont se condenser les grains de poussière qui donnent naissance au rayonnement infrarouge galactique.

Pour ce faire, il est nécessaire de connaître les *yields* $Y_Z(m)$ stellaires pour les étoiles massives et les étoiles de masses intermédiaires (par exemple, [142], [143]). Il faut également inclure les rejets dus aux supernovae de type I (avec le formalisme de [144]), qui ont des *yields* différents (par exmple [145]).

Une fois ces quantités connues, le plus simple modèle d'évolution chimique fait alors l'hypothèse qu'une galaxie peut être approximée par un système en boîte fermée (voir par exemple [11]), c'est–à–dire que sa masse totale $M_*(t) + M_g(t)$ (étoiles plus gaz) reste constante au cours du temps.

$$M_g(t) + M_*(t) = M_{tot}\ ,\quad M_{tot} = \mathrm{C^{st}} \tag{93}$$

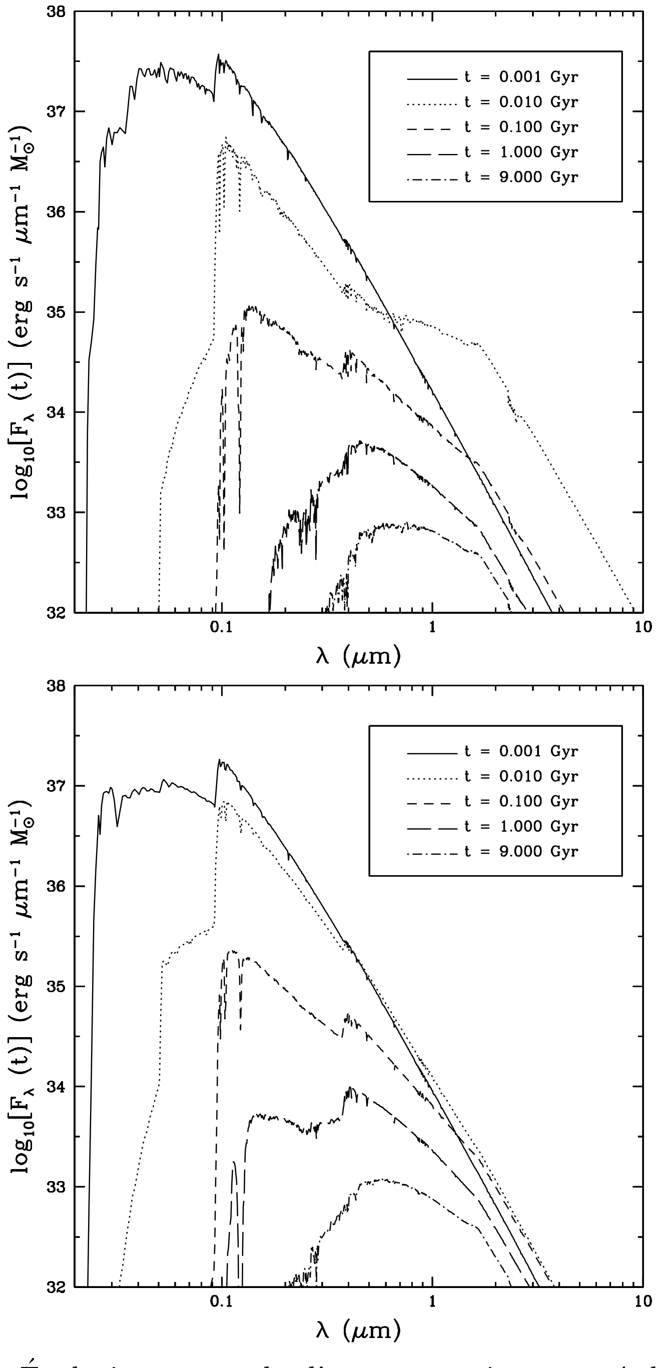

Figure 11. – Évolution spectrale d'un sursaut instantané de formation d'étoiles de metallicité $Z_\odot$ (haut) et $\frac{1}{20}Z_\odot$ (bas). La FMI est une fonction de Salpeter, et les niveaux de flux correspondent à ceux d'un objet de 1 $M_\odot$.

La plupart des modèles semi-analytiques font l'hypothèse de "recyclage instantané" qui consiste à dire que les étoiles, dès qu'elles se sont formées, éjectent une fraction de leur masse sous forme de métaux, mais le formalisme présenté ci-dessous suit les métaux rejetés à chaque instant par les étoiles de différentes masses, laissant les nouvelles étoiles se former à partir du gaz enrichi, en supposant un mélange instantané des éléments lourds avec le gaz environnant. En pratique, cela revient à résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{d(Z_g M_g)(t)}{dt} = -Z_g(t)\frac{M_g(t)}{t_*} + \mathcal{E}_Z(t) \tag{94}$$

avec Z_g pourcentage en masse de l'élément Z dans le gaz, et $t_* = \beta t_{dyn}$ échelle de temps caractéristique de l'astration.

$\mathcal{E}_Z(t)$ est, quant à lui, le taux d'éjection de l'élément Z au temps t :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_Z(t) &= \int_{m_t}^{m_{BH}} d(\log m)\frac{M_g(t-t(m))}{t_*}\phi(m) \\ &\times \ \{(m-w(m))Z_g(t-t(m)) + mY_Z(m)\}\,, \end{aligned} \tag{95}$$

où m_t est la masse stellaire minimale possible, soit la masse d'une étoile ayant une durée de vie de t, $w(m)$ est la masse du résidu stellaire, et $t(m)$ la durée de vie d'une étoile de masse m.

Le premier terme entre accolades, $(m - w(m))Z_g(t - t_m)$, est la masse en élément Z initialement présente qui est rejetée à la fin de la vie de l'étoile, [22] et l'argument $(t - t(m))$ est dû au fait que les étoiles de masse m, qui meurent au temps t, sont nées au temps $(t - t(m))$. Le second terme, $mY_Z(m)$, est le pourcentage de la masse initiale de l'étoile transformée en nouveaux éléments Z, c'est–à–dire produits par la nucléosynthèse stellaire, encore appelé *yield* stellaire.

La limite supérieure de l'intégrale 95, est donnée par la masse initiale de l'étoile, m_{BH}, au–delà de laquelle le trou noir final engloutit toute l'étoile et les produits de la nucléosynthèse. C'est la partie la plus incertaine du calcul, car elle nécessite à la fois de connaître la perte de masse de l'étoile antérieure à la formation du trou noir, qui dépend de la métallicité de l'étoile, et la fraction de la structure en pelure d'oignon pré–supernova qui sera engloutie par le trou noir. Un modèle compatible avec les contraintes observationnelles existantes [142] suppose que toute l'étoile restante est avalée au moment de l'effondrement du cœur,

[22] C'est–à–dire la différence entre la masse initiale de l'étoile et celle de son résidu compact, multipliée par le pourcentage en masse initial de l'élément Z.

si la masse de l'étoile initiale est $m_{BH} \sim 25 M_\odot$, indépendamment de la métallicité [23].

Notons que le formalisme décrit ci-dessus est facilement adaptable à une galaxie "réelle" : il suffit en effet d'ajouter un terme d'accrétion et un terme d'éjection dans les équations 93 et 94 pour obtenir la description la plus générale possible. C'est cette équation généralisée qui est couramment utilisée dans les modèles semi-analytiques.

7.5 Spectres synthétiques de populations stellaires

Au terme de toutes ces étapes, nous disposons donc d'une description physique de l'évolution des contenus gazeux et métallique dans nos galaxies, ainsi que de leur histoire de formation d'étoiles complète. Nous sommes donc à même de calculer les distributions spectrales d'énergie (DSE) de nos objets, en utilisant la théorie de l'évolution stellaire et les spectres stellaires pour des étoiles de différentes masses et métallicités.

La contribution stellaire au spectre galactique $F^*_\lambda(t)$ à chaque instant t peut s'écrire de la manière suivante :

$$F^*_\lambda(t) = \int_0^t \int_{m_d}^{m_u} \frac{dM_*(t-\tau)}{dt} \phi(m) f_\lambda(m,\tau) \mathrm{d}m \, \mathrm{d}\tau \ , \qquad (96)$$

où $f_\lambda(m,\tau)$ est le flux d'une étoile de masse initiale m et d'âge[24] τ à la longueur d'onde λ. Il faut noter que nous avons négligé la composante nébulaire dans l'équation 96, c'est–à–dire que nous n'avons pas tenu compte des altérations du spectre galactique dû à l'émission du gaz ionisé des régions de formation d'étoiles[25].

La solution la plus brutale est une discrétisation de cette double intégrale, mais celle–ci donne lieu à des oscillations dans le spectre résultant $F^*_\lambda(t)$, principalement dues aux phases rapides de l'évolution stellaire [147]. La méthode naturelle pour éviter ces oscillations, est d'utiliser un schéma dit "isomasse", qui ne discrétise que l'intégrale sur la masse, méthode utilisée dans les travaux antérieurs à 1991. Cependant, le problème d'un tel algorithme est qu'il nécessite une grille en masse

---

[23] L'hypothèse simplificatrice de rejeter les produits de la nucléosynthèse stellaire à la fin de la vie de l'étoile, fait donc sous–estimer quelque peu la métallicité.

[24] $\tau = 0$ correspond à l'âge zéro de la séquence principale, et $f_\lambda(m,\tau) = 0$ si $\tau > t_m$ où t_m est la durée de vie d'une étoile de masse m.

[25] En pratique, la contribution d'un tel gaz peut s'avérer importante, et même dominante dans les premières dizaines de millions d'années suivant le déclenchement d'une flambée de formation d'étoiles. Cela dépend fortement de la FMI, et pour une fonction de Salpeter, la contribution des raies d'ionisation au flux total est au maximum de 30 % dans les différentes bandes photométriques de Johnson [146].

très fine pour obtenir un bon recouvrement des étapes équivalentes de l'évolution stellaire de masses consécutives. En conséquence de quoi, le temps machine consommé par une telle méthode est assez élevé.

L'autre solution, qui conduit aux mêmes résultats, mais qui est de loin plus confortable au niveau machine, est nommée schéma "isochrone", et consiste à discrétiser l'intégrale sur le temps [147]. Qui plus est, elle a l'avantage de produire des résultats directement comparables aux diagrammes couleur–magnitude issus d'observations d'amas globulaires. Les isochrones sont, de toute évidence, choisies avec soin pour ne manquer aucune étape importante de l'évolution stellaire. Ce sont les spectres galactiques obtenus en utilisant une telle méthode numérique que nous montrerons par la suite.

7.6 Processus de fusion

Lorsque des halos fusionnent, les galaxies qu'ils contiennent se retrouvent dans la même structure de matière sombre. Ces galaxies sont alors susceptibles d'interagir entre elles et de fusionner avec leurs propres échelles de temps. Le processus le plus remarquable est celui de l'interaction des galaxies avec le halo lui–même. Celles-ci voient en effet les particules de matière sombre être déviées par leur interaction gravitationnelle et s'accumuler dans leur sillage. L'accumulation de matière située derrière chaque galaxie lui fait perdre de l'énergie, et l'amène à spiraler vers le centre. Ce processus, appelé friction dynamique [102], conduit à la variation suivante du rayon orbital r (dans le cadre d'orbites quasi–circulaires) :

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= -0.428\frac{GM_{sat}}{V_c}\ln\Lambda \\ \Lambda &\equiv 1+\frac{M_{acc}}{M_{sat}} \end{aligned} \qquad (97)$$

Dans cette formule, la masse M_{sat} de la galaxie interagissant avec le halo (appelée *satellite*) inclut non seulement la masse baryonique, mais celle du "sous–halo", la structure de matière sombre qui a survécu aux effets de marée du halo de masse M, maximaux lors du passage au péricentre. La grandeur Λ est encore appelée le "logarithme de Coulomb", et dépend, en principe, du rapport des rayons r_{acc}/r_{sat} de la galaxie centrale accrétante et de la galaxie satellite. Il peut aussi être exprimé en fonction du rapport des masses, en supposant une simple relation d'échelle de la matière sombre pour un halo isotherme (pour lequel la masse à l'intérieur du rayon r est simplement proportionnelle à r). Enfin V_c est la vitesse circulaire dans le halo. Cette équation montre que la galaxie satellite la plus massive est celle qui rejoint le plus vite le centre du halo, et devient

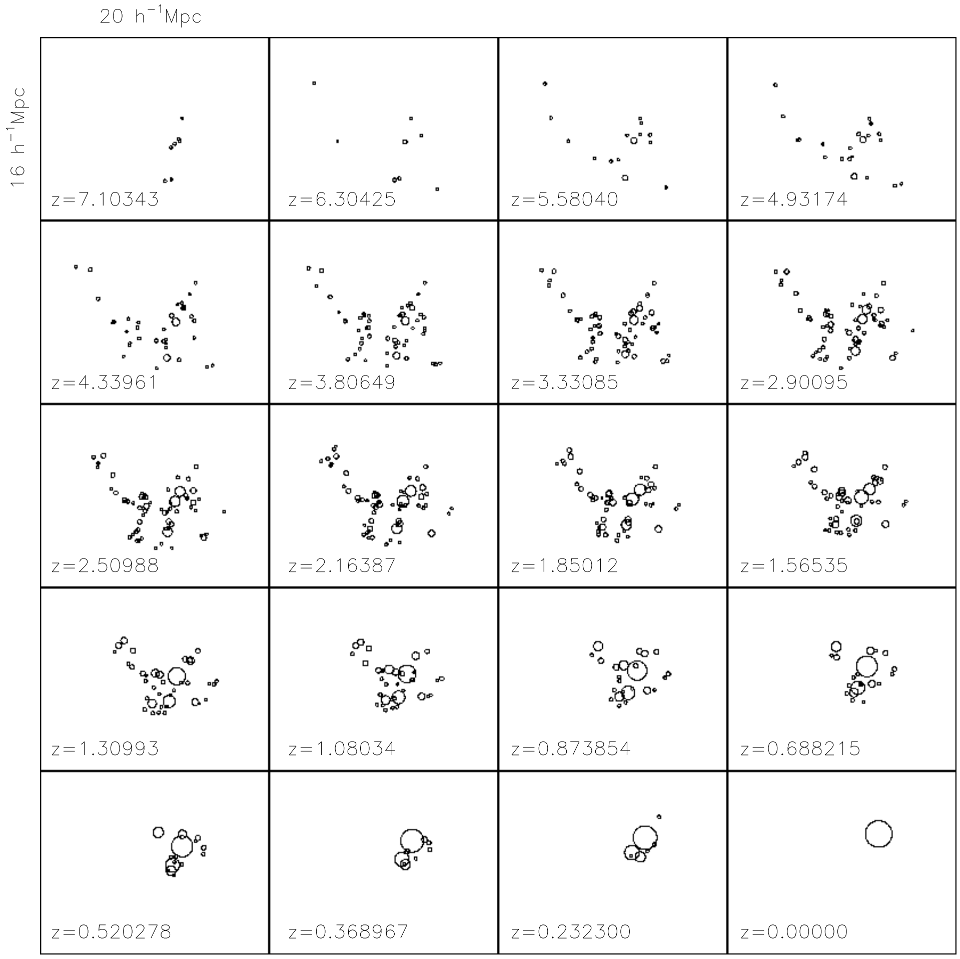

Figure 12. – Arbre de fusion d'un halo de $1.9 \times 10^{14} M_\odot$ pour la cosmologie ΛCDM. Les plus petites structures repérées par l'algorithme FOF correspondent à des halos de masse $1.7 \times 10^{11} M_\odot$. Ces structures s'effondrent en dessinant des filaments, puis coulent le long des filaments, vers le nœud où se forme un halo correspondant à un amas riche, vers le redshift $z = 1$.

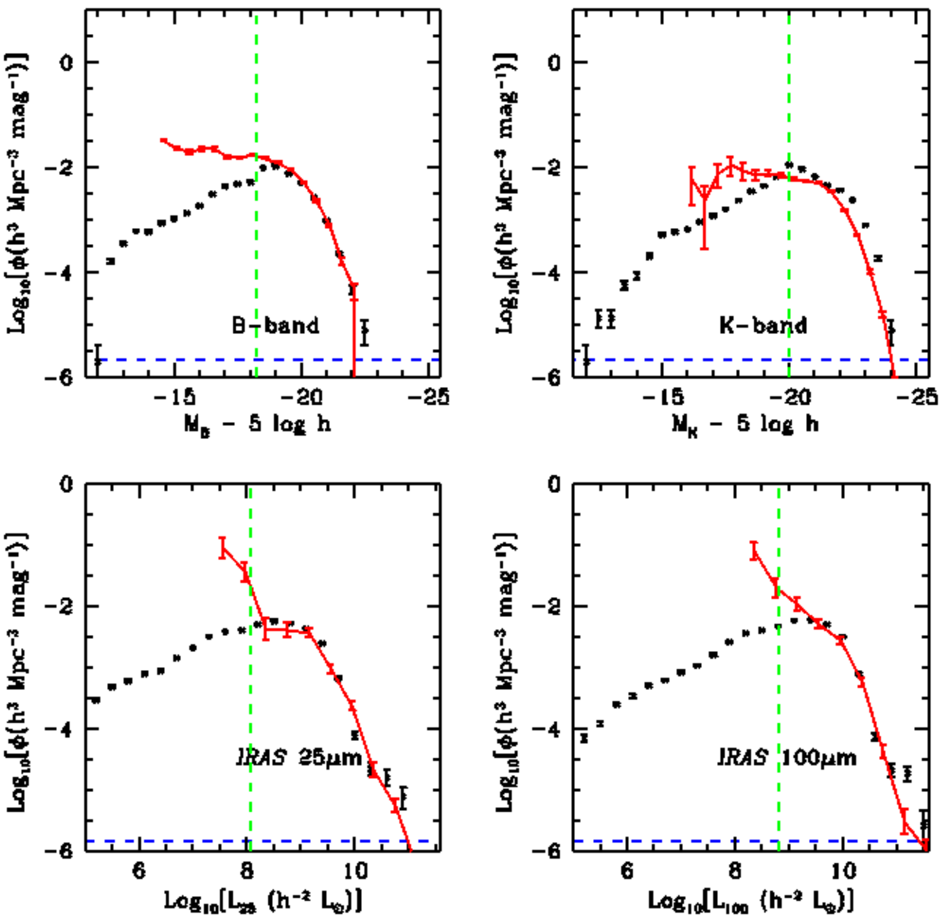

Figure 13. – Fonctions de luminosité dans un univers ΛCDM. La limite verticale correspond à la limite formelle de résolution associée à la simulation numérique (20 particules pour identifier un halo de matière sombre. Cette limite en masse se traduit par une limite en luminosité, au-delà de laquelle la simulation est considérée comme complète. La limite horizontale correspond à l'effet de volume fini. La densité correspondante est d'un objet dans le volume de la simulation.

"galaxie centrale" si celle-ci n'existe pas encore. En intégrant l'équation à partir des conditions initiales, jusqu'à une distance correspondant à la somme des tailles de la galaxie centrale et d'une galaxie satellite, on peut définir le temps t_{fric} au bout duquel chaque galaxie satellite rejoint la galaxie centrale et fusionne avec elle. Par ailleurs, les galaxies satellites sont susceptibles de connaître des rencontres à deux corps lors de leur trajet dans le halo. Le taux de fusion peut être estimé par la formule suivante [148] :

$$\tau^{-1} = \psi(N_g) \left(\frac{r_{1/2}}{R_V}\right)^3 \left(\frac{v_{gal}}{V_c}\right)^3 \frac{v_{gal}}{r_{1/2}} \tag{98}$$

où N_g est le nombre de galaxies dans le halo, v_{gal} la moyenne pondérée de la dispersion de vitesse du bulbe et de la vitesse de rotation du disque, $r_{1/2}$ le rayon à la moitié de la masse, et R_V et V_c le rayon de viriel et la vitesse circulaire du halo. Le résultat de la fusion entre deux galaxies dépend des masses, tailles et contenus gazeux des galaxies, comme des paramètres orbitaux. De nombreuses simulations numériques ont permis de constater des tendances générales. Lorsque le rapport des masses entre le secondaire et le primaire est petit (typiquement inférieur à 0.3), le secondaire est en quelque sorte cannibalisé par le primaire. Le cœur stellaire plus ou moins dense du secondaire va rapidement rejoindre le cœur du primaire par friction dynamique, les étoiles moins liées du secondaire se mélangeront à celle du bulbe du primaire, et le gaz du secondaire rejoindra le disque du primaire. En revanche, lorsque les galaxies ont des masses comparables, l'interaction produit un changement morphologique significatif. Le gaz des disques éventuels est déstabilisé et s'écoule vers le centre des galaxies puis/ou vers le centre du produit de la fusion, avec une contraction typique d'un facteur 10. Un sursaut de formation d'étoiles se déclenche, sursaut qui est généralement très éteint en raison de la concentration du gaz et des poussières. Enfin, les étoiles des galaxies progénitrices s'arrangent en une structure qui suit plus ou moins une loi de sphéroïde (par exemple la loi en $r^{1/4}$ de de Vaucouleurs [149]).

8 Approches de la formation hiérarchique des galaxies

Les principaux concepts physiques qui régissent la formation hiérarchique des galaxies ont été discutés dans les sections précédentes. Il existe plusieurs façons de mettre en œuvre ces processus. Nous les décrivons tour à tour dans la section suivante et discutons brièvement leurs mérites.

8.1 Semi–analytique, numérique, hybride ...

Au début des années 1990 furent tentées les premières approches pour calculer les propriétés statistiques des galaxies, en partant du spectre des fluctuations primordiales (à l'époque un spectre SCDM) et en arrivant jusqu'aux luminosités et couleurs des objets. Ces modèles ont incorporé les différentes étapes décrites plus haut avec la même philosophie générale, mais des différences dans le détail technique de la modélisation ([151] [152] [153]). Dans leur version la plus simple, ils étaient incapables de calculer effectivement la formation *hiérarchique* des galaxies au sens strict du terme, dans la mesure où ils ne pouvaient pas prédire le taux de fusion des galaxies de manière précise, soit parce que le taux de fusion des halos n'était pas inséré dans le formalisme (par exemple lorsque le formalisme des pics était utilisé), soit parce que ce taux était uniquement traité en valeur moyenne, dans le cadre de l'approche semi-analytique fondée sur le formalisme étendu de Press–Schechter.

Un progrès clef a donc été la réalisation Monte–Carlo d'arbres de fusion des halos, dans lesquels la fusion des galaxies peut être introduite ([130] [154] [131], puis [155] [156]). Au lieu de calculer uniquement les propriétés moyennes des arbres de fusion des halos, des réalisations d'arbres sont tirées à partir de la statistique du formalisme étendu de Press–Schechter, et les galaxies qui se forment dans ces halos peuvent fusionner (ou non) avec leurs propres échelles de temps.

Cependant, les arbres de fusion des halos issus du formalisme étendu de Press–Schechter (voir section 5) ne contiennent pas d'autre information spatiale et dynamique que le rayon de viriel et la vitesse circulaire des halos. La distribution spatiale et les vitesses particulières de ceux–ci ne sont pas suivies. La description reste donc incomplète, ce qui nuit à la modélisation des échelles de temps caractéristiques d'interaction et de fusion des galaxies dans les halos. Par ailleurs, les fonctions de masse des halos issues de ce formalisme reposent sur la description simplifiée de l'effondrement gravitationnel (celle du modèle du "chapeau haut–de–forme" présentée en section 4), et ont tendance à surestimer (d'un facteur 1.5 à 2) les résultats des simulations numériques cosmologiques aux petites masses, comme cela a été discuté en section 6.

Peut–on encore continuer à améliorer l'approche semi–analytique, ou bien faut–il désormais aborder l'étude de la formation hiérarchique des galaxies à travers l'analyse de simulations numériques N–corps + hydrodynamique à haute-résolution ? En fait, cette deuxième méthode d'investigation (les simulations) offre évidemment une approche plus réaliste, mais elle est lourde et coûteuse, et manque donc de souplesse quand il s'agit de modifier les hypothèses relatives à l'astrophysique mal connue (formation d'étoiles, rétroaction, etc.), qui doit, de toute façon, y être

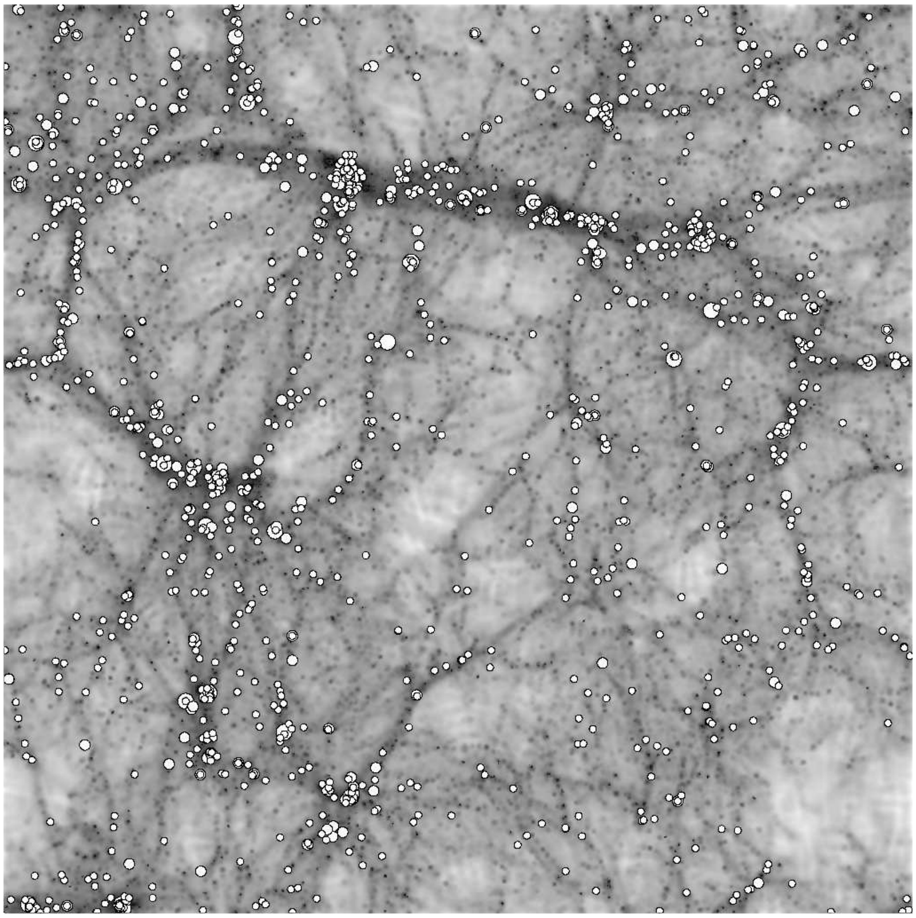

Figure 14. – Distribution des galaxies dans les structures de matière sombre dans un dixième d'une boîte de 150 Mpc de côté, pour la cosmologie ΛCDM. Dans le cadre de l'approche hybride de la formation hiérarchique des galaxies, l'effondrement gravitationnel de la matière sombre a été suivi dans une grosse simulation numérique, et la physique dissipative des baryons a été modélisée de façon semi–analytique. Chaque fusion de galaxies crée un bulbe autour duquel un nouveau disque peut éventuellement se former. Les rapports bulbe/disque fixent la classification morphologique. Les galaxies avec $M_B < -19.5$ sont représentées par des cercles d'autant plus grands qu'elles sont brillantes.

introduite sous forme semi–analytique. L'état de l'art actuel de ce genre de simulations cosmologiques N–corps + hydrodynamique ne permet pas de descendre en dessous d'une résolution en masse correspondant à des halos d'environ $10^{12} M_{\odot}$, qui se répercute sur la fonction de luminosité des galaxies à $z = 0$ comme une limite en luminosité de l'ordre de L^* (voir par exemple [157]).

D'où l'idée d'une troisième approche, l'approche hybride, qui consiste à marier certains des avantages des simulations numériques et des modèles semi–analytiques. Il s'agit ici d'utiliser les simulations numériques cosmologiques à N-corps pour décrire la matière sombre. Une première possibilité consiste à tirer les arbres par la méthode Monte–Carlo, à partir des halos identifiés dans la simulation. On récupère ainsi l'information spatiale, mais les arbres ne sont cohérents avec la simulation considérée que de façon statistique, et l'on ne peut pas, par exemple, prédire la position des progéniteurs d'une galaxie donnée ([158] [159] [160]). Une autre possibilité, complètement cohérente, consiste à obtenir des arbres de fusion des halos plus réalistes que ceux du formalisme de Press–Schechter, en les construisant directement à partir des sorties de la simulation (voir les premiers essais dans [161] [162]), puis un premier développement à partir d'une grosse simulation numérique cosmologique dans [163]). Dans ces arbres est implantée, de façon semi–analytique, la physique dissipative des baryons. Les prédictions sont évidemment restreintes aux paramètres cosmologiques retenus pour les simulations, mais la partie semi–analytique tourne très rapidement et toute l'astrophysique dissipative peut ainsi être modifiée et améliorée à volonté. En revanche, l'approche hybride répercute sur les galaxies les limites inhérentes à la résolution en masse de la simulation, et à la perte d'information sur les objets rares qui n'apparaissent pas dans le volume fini de la boîte. Nous nous arrêtons ci-dessous sur un exemple de cette approche, qui semble être la plus prometteuse aujourd'hui, dans la mesure où, comme le montrent des comparaisons détaillées ([164] [165]), elle permet de prédire, à partir d'une simulation donnée, la fonction de luminosité des galaxies un ordre de grandeur plus profond que la même simulation couplée à l'hydrodynamique.

8.2 Un exemple de l'approche hybride : GalICS

Le projet GalICS (pour *Galaxies in Cosmological Simulations*, [166] et papiers de cette série) constitue une nouvelle mise en œuvre de l'approche hybride, avec comme objectif explicite la modélisation des propriétés panchromatiques des galaxies (dans l'ultraviolet, l'optique, l'infrarouge et le submillimétrique). Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, une telle modélisation sur un grand domaine de longueur d'onde est indispensable pour tester le paradigme de la formation hiérarchique, parce que les phases de fusion des galaxies se signalent surtout par l'émission, à grandes longueurs d'onde, de la poussière chauffée par les sursauts de formation d'étoiles. Nous donnons, à titre d'illustration, une brève description du modèle GalICS et de certains de ses résultats, qui sont caractéristiques de l'état de l'art dans le domaine.

La grosse simulation cosmologique à N–corps ΛCDM présentée en section 6 a été utilisée pour fournir l'information nécessaire sur la structuration progressive de la matière sombre. Pour chaque simulation, les 40 Go de données produites (environ 70 *snapshots*, ou sorties, donnant positions et vitesses des 256^3 particules pour 70 temps de sortie astucieusement espacés) permettent l'identification des halos par un algorithme *ad hoc* (typiquement un *friend–of–friend*), puis la construction de l'arbre de fusion des halos. Un exemple d'arbre pour un halo massif, qui inclut aussi l'information spatiale, est donné par les vignettes de la figure 12. On procède ensuite à la construction de l'arbre de fusion des galaxies qui comprend tous les processus dissipatifs, les fusions de galaxies et le calcul des propriétés photométriques panchromatiques. Les paramètres cosmologiques H_0, Ω_0, λ_0, le spectre de puissance $P(k)$ et sa normalisation $\sigma_{8/h}$, sont fixés dans la simulation ΛCDM aux valeurs qui font l'objet du consensus actuel. La densité baryonique Ω_{bar} est également fixée par la théorie de la nucléosynthèse primordiale et les observations des éléments légers. Il reste plusieurs paramètres libres nécessaires pour simplifier les processus astrophysiques complexes que sont la formation d'étoiles, la rétroaction des étoiles sur le milieu interstellaire, et la nature des objets créés par les fusions des galaxies. Toutefois, il existe des idées théoriques et des observations sur ces sujets, et les paramètres libres ne peuvent être modifiés qu'à l'intérieur d'un domaine relativement étroit. Etant donné le grand nombre d'observations qui peuvent être prédites par le modèle, le problème est donc largement surcontraint.

Si les simulations numériques tournent sur les ordinateurs des centres de calcul nationaux, le traitement ultérieur de l'identification et de la construction des arbres doit s'effectuer en local à l'Institut d'Astrophysique de Paris, grâce à une série de codes qui utilisent la machine MAGIQUE (une Origin 2000 avec 14 processeurs R12K et 21 Go RAM en mémoire partagée). Le calcul de l'ensemble sur un processeur requiert typiquement une journée de temps CPU et de l'ordre de 2 Go de RAM pour 70 *snapshots* de 16 millions de particules (256^3). L'approche est, dès le départ, panchromatique, avec des spectres fournis par le modèle STARDUST allant de l'UV au domaine millimétrique ([167]). La limite en masse des halos (20 particules, soit $1.6 \times 10^{11} M_\odot$) se répercute sur la fonction de luminosité des galaxies à $z = 0$ sous la forme d'une limite formelle de résolution en magnitude absolue de $M_B = -18$. La fonction de luminosité est correctement décrite sur un domaine d'environ 5 magnitudes, depuis les galaxies les plus brillantes jusqu'à cette limite formelle de résolution. Une boîte de 150 Mpc de côté contient environ 30 000 galaxies (contre $1.5^3 \times 2200$ pour la grosse simulation cosmologique hydrodynamique [157] mentionnée précédemment). La simulation totale (c'est-à-dire l'ensemble de tous les *snapshots*), comprend environ 2 millions de galaxies, pour lesquelles les principales propriétés sont connues, ainsi que les spectres et les couleurs dans différents filtres. Le volume total des prédictions, en incluant les spectres, est d'environ 50 Go. Divers problèmes peuvent être abordés avec GalICS : sensibilité des prédictions aux paramètres cosmologiques et astrophysiques, description de l'univers local et de l'univers lointain, propriétés des galaxies dans l'optique et l'infrarouge, fonction de corrélation et biais, etc. L'impression générale qui émerge des résultats de ce code, comme de l'autre code concurrent (par exemple [163]), est que le modèle hiérarchique reproduit l'ensemble des données disponibles de façon qualitative, même si le détail quantitatif de certains ajustements laisse parfois à désirer.

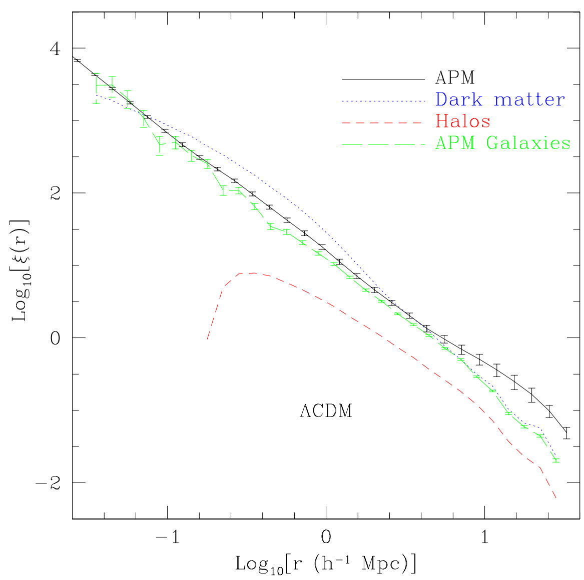

Figure 15. – Fonction de corrélation à deux points des galaxies de la simulation numérique, sélectionnées selon les critères du relevé APM.

La figure 13 illustre les fonctions de luminosité prédites par le modèle, dans l'optique et l'infrarouge lointain. Le bilan de luminosité cosmique dans l'univers local semble correct. Le modèle prévoit également les fractions de galaxies selon le type morphologique, ici défini uniquement comme fonction du rapport de luminosité du bulbe et du disque :

respectivement 12 % d'elliptiques, 9 % de lenticulaires et 79 % de spirales et types plus tardifs pour les galaxies plus brillantes que $M_B = -19.5$, alors que la mesure du relevé Stromlo–APM donne 14 ± 2 % d'elliptiques, 13 ± 2 % de lenticulaires et 73 ± 5 % de spirales. Le modèle hiérarchique est donc capable de reproduire la séquence de Hubble locale, même si cette question est rendue quelque peu confuse par l'absence d'une même classification automatisée qui puisse tourner à la fois sur des données et des simulations.

La figure 14 illustre la distribution de la matière sombre calculée dans une simulation, et la localisation des galaxies dans les grandes structures, pour 1/10ème de la boîte. La fonction de corrélation à deux points des galaxies peut facilement être calculée à partir de la simulation. La figure 15 compare le résultat de la mesure dans la simulation à $z = 0$ avec la mesure effectuée sur le catalogue APM, en prenant la même limite en magnitude. Cette figure doit être regardée en la comparant au résultat pour la matière sombre seule, donné par la figure 10. De façon très satisfaisante, la tendance au regroupement des galaxies locales est correctement prédite par le code. La prédiction correspond bien à un biais linéaire $b \simeq 1$ par ailleurs nécessaire pour ajuster les observations dynamiques dans le cadre d'une cosmologie ΛCDM.

Les sondages récents ont dévoilé diverses classes d'objets lointains définies à partir de leurs critères de sélection observationnelle. Pour relier entre elles ces observations, il faut mettre en œuvre une modélisation qui reproduise les propriétés panchromatiques des galaxies. L'approche hybride a justement cette capacité de relier des observations à des longueurs d'onde très différentes, en utilisant la connaissance des processus physiques responsables de l'émission. Par exemple, GalICS produit des catalogues synthétiques de galaxies. A partir de ces catalogues synthétiques peuvent être créées des images fictives de champs de galaxies en projection sur le plan du ciel, auxquelles on a toute liberté pour appliquer le bruit, les systématiques et les spécificités d'un instrument donné (optique, IR, submm). Ces images ont une triple fonction. D'abord, elles donnent les résultats du modèle de façon globale, et dans un format aussi proche que possible de celui des observations. Les images fictives ont alors vocation à être traitées par les mêmes logiciels que les données réelles, dans une sorte de procédure d'observation fictive. Ensuite, ces catalogues peuvent être utilisés pour concevoir les stratégies observationnelles des grands relevés à venir, qui sonderont des résolutions spatiales, des niveaux de flux et des domaines de longueur d'onde encore inexplorés. Au lieu d'extrapoler ou d'interpoler les observations actuelles, un modèle raisonnablement ajusté sur les observations fournit des prédictions qui sont motivées physiquement. Enfin, ces images fictives permettent de tester

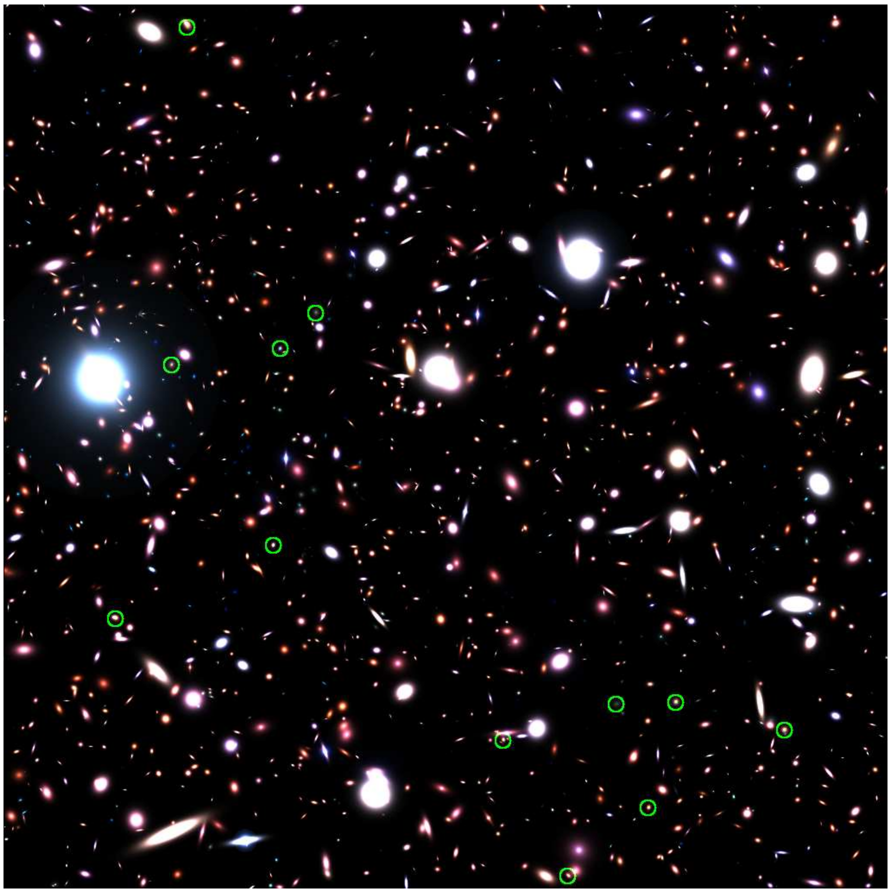

Figure 16. – Une image fictive d'un champ de 13 arcmin^2 obtenue en intégrant le catalogue GalICS de la simulation ΛCDM le long du cône de lumière. Les types, luminosités et tailles des galaxies sont calculés dans le code. Une absorption intergalactique moyenne due à la forêt Lyman α est incluse. Le comptage des sources ajuste bien les données observationnelles. L'image en couleur est obtenue en superposant les images en bande B, R et I, et convoluée par une PSF. Du bruit a été ajouté. Les 11 "Lyman Break Galaxies" (entourées) sont sélectionnées selon les critères de couleurs de Steidel *et al.* 1996. Image communiquée par Jérémy Blaizot.

les chaînes de traitement de données, en comparant le catalogue de sortie avec le catalogue initial.

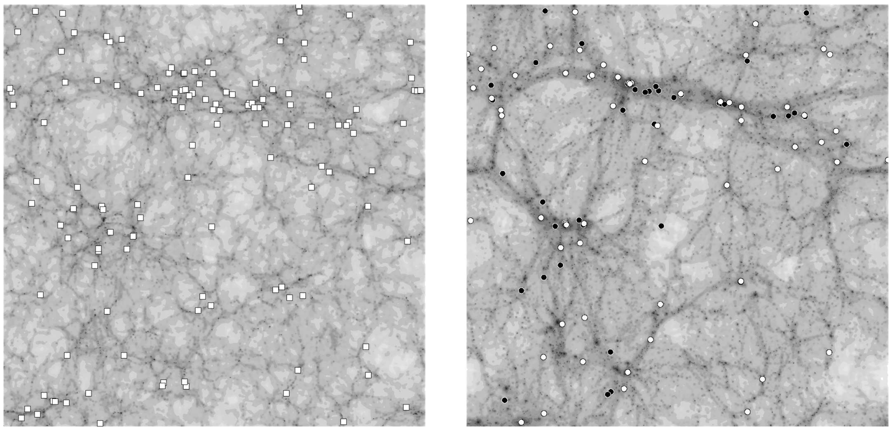

Figure 17. – Histoire des “Lyman Break Galaxies”. Panneau de gauche : Localisation des LBGs à $z = 3$ dans les structures de matière sombre. La taille comobile de la boîte est de 150 Mpc, et l'épaisseur de la tranche est de 15 Mpc. Panneau de droite : Localisation des descendants des LBGs à $z = 0$: elliptiques et lenticulaires (points blancs), et spirales (points noirs). Image communiquée par Jérémy Blaizot.

La figure 16 illustre le genre d'images fictives qui peuvent être obtenues avec GalICS, sur un champ de 13 arcmin^2 à la magnitude apparente $R_{AB} < 25.5$. L'absorption des photons en déçà de la limite de Lyman, par les nuages de gaz intergalactiques situés sur la ligne de visée, est introduite dans la réalisation de l'image. Des critères de sélection en magnitude et en couleurs apparentes sont alors appliqués pour identifier les galaxies dites à discontinuité de Lyman (ou *Lyman Break Galaxies*, en abrégé LBGs) situées au redshift $z \simeq 3$. Le critère ici retenu est celui de Steidel et collaborateurs ([45] [46]). Le nombre d'objets identifiés sur l'image est de 11 sur les 13 arcmin^2 du champ. Les comptages de LBGs semblent donc correspondre aux densités sur le ciel qui sont effectivement observées ([46]). Il s'avère que ces objets sont les galaxies centrales de halos qui ont typiquement $10^{12} M_\odot$. Leur corrélation spatiale est conforme aux observations, avec un fort biais à ce redshift. Le code confirme aussi que les objets sélectionnées comme LBGs représentent les galaxies brillantes à $z = 3$, et sont les progéniteurs des galaxies géantes actuelles, même si la fraction de masse baryonique effectivement en place dans ces galaxies à cette époque ne dépasse pas 20 à 30 % de la masse des galaxies géantes actuelles, car le processus de fusion s'est poursuivi depuis cette époque. La figure 17 montre la relation qui peut être établie, à travers GALICS, entre les LBGs à $z = 3$ et les elliptiques actuelles. Alors qu'environ 10 à 15 % des galaxies locales plus brillantes que $M_B = -18.8$ sont des elliptiques dans la simulation (et dans les données APM), 75 % des descendants de LBGs sont des elliptiques à $z = 0$. Cette figure permet de saisir le potentiel de ce genre d'approche comme outil de comparaison d'un modèle de formation hiérarchique avec les observations.

9 Une brève conclusion et quelques perspectives

Il est désormais possible de mener les calculs de formation des galaxies dans le cadre explicite du modèle du Big Bang chaud, en supposant une variante quelconque du CDM (ou même un *Warm Dark Matter*), et en utilisant des approches de type semi–analytique ou, mieux encore, hybride. Le calcul prédit alors que la formation des galaxies est hiérarchique, c'est–à–dire qu'elle se poursuit selon un processus continu des plus petits objets aux plus gros, et que, entre autres conséquences, le type morphologique de Hubble n'est pas fixé une fois pour toutes, mais évolue au cours de la croissance de la hiérarchie. Différents modèles ont été proposés depuis une dizaine d'années pour incorporer les nombreux processus qui régissent cette formation hiérarchique et qui ont été brièvement répertoriés dans les sections précédentes. L'impression générale est que, en dépit des détails des différents codes, les résultats montrent une grande robustesse.

Les succès de l' approche semi-analytique et de l'approche hybride, qui agissent comme "éclaireurs" par rapport aux simulations hydrodynamiques, sont particulièrement spectaculaires. Les modèles arrivent désormais à reproduire de façon encourageante les fonctions de luminosité des galaxies à différentes longueurs d'onde, ainsi que l'évolution de ces fonctions de luminosité, au moins jusqu'à $z = 3$, telle qu'elle est observée à travers les comptages de galaxies et les distributions en redshift, au moins dans l'optique, et l'infrarouge moyen et lointain (jusqu'à 100 μm). Les corrélations entre les différentes propriétés des galaxies (contenu gazeux, masse, couleurs, type) sont bien prédites. La fonction de corrélation à deux points semble en bon accord avec les observations.

En revanche, ces modèles rencontrent aussi un certain nombre de difficultés. Avec le recul, on peut mentionner quatre d'entre elles qui semblent plus ou moins récurrentes, et que nous citons "par ordre d'importance croissante", en allant du problème le moins difficile à résoudre à celui qui met le plus en danger le scénario hiérarchique.

1. *La pente de la fonction de luminosité.* La fonction de masse des halos telle qu'elle sort du formalisme étendu de Press–Schechter ou des simulations numériques a une pente $\alpha = -2$. La pente correspondante pour la fonction de luminosité est plus faible, de l'ordre

de $\alpha = -1.5$ à -1.3, mais semble supérieure à celles donnée par les observations, proche de $\alpha = -1$.[26] De longs débats ont eu lieu pour connaître l'origine de ce désaccord : effets de sélection sur les données défavorisant les galaxies de faible brillance de surface dans les observations (en principe modélisable dans les codes, voir par exemple [168]) ? Modélisation incomplète des effets des vents galactiques, qui contribuent à l'essentiel de l'aplatissement de la fonction de luminosité par rapport à la fonction de masse ? Ou encore effet du chauffage du milieu intergalactique associé à la réionisation par les premières étoiles et les noyaux actifs, ou bien par une population de supernovae primordiales (voir par exemple [141]) ? Il semblerait que la prise en compte de tous ces effets, et en particulier du dernier, puisse résoudre le problème.

2. *Les relations structurelles matière–lumière.* Il reste toujours délicat de reproduire la relation de Tully–Fisher entre magnitude absolue et vitesse de rotation des disques, et la relation de Faber–Jackson entre magnitude absolue et dispersion de vitesse des bulbes et elliptiques. Ces relations permettent de comprendre de façon fine comment l'on passe de la matière sombre à la matière lumineuse. La pente est plus ou moins bien reproduite, mais la dispersion prédite semble toujours supérieure à la dispersion observée. Les chemins évolutifs des galaxies sont très variés et produisent cette dispersion. Les résultats actuels semblent donc montrer que ces chemins sont *trop* variés. Toutefois, la modélisation détaillée des relations structurelles est rendue délicate par le fait que la gravité de la matière baryonique ne peut plus être considérée comme négligeable pour le calcul des vitesses. Or les approches semi–analytique et hybride considèrent les baryons comme des "particules tests" dans les puits de potentiel creusés par la matière sombre. Des corrections sont possibles, mais demeurent incertaines.

3. *Les comptages submillimétriques.* Alors que les comptages infrarouges semblent bien reproduits, les comptages submillimétriques prédits par les modèles sont en désaccord avec les données de SCUBA à 850 μm et de MAMBO à 1.3 mm, au niveau de flux de 1–10 mJy. Il s'agit là d'une situation quelque peu inconfortable puisque le modèle hiérarchique est justement sensé reproduire ces objets, les LIRGs et ULIRGs qui tracent les fusions majeures

[26] Ce problème apparaît pour l'instant uniquement dans les approches purement semi–analytiques. Dans l'approche hybride, il est caché par les effets de résolution qui empêchent de sonder très profondément la fonction de luminosité. Des simulations à plus haute résolution permettront de mieux cerner la question.

entre galaxies de masses comparables. Les galaxies lointaines des modèles ne semblent pas assez lumineuses dans le domaine submillimétrique. Il se pourrait que ce défaut de luminosité vienne d'un défaut de chauffage des poussières : contribution de noyaux actifs très éteints (qui devraient être suffisamment éteints pour ne pas apparaître dans les observations X, puisque les sources SCUBA n'ont généralement pas de contreparties CHANDRA), ou bien changement de la fonction de masse initiale lors des épisodes de sursauts de formation d'étoiles ? Une solution plus séduisante pourrait venir d'une meilleure modélisation des spectres d'émission des galaxies, qui semblent contenir des composantes de poussières plus froides que ce qui a été vu par le satellite IRAS (voir par exemple les couleurs infrarouges des galaxies du relevé ISO à 170 μm [169]).

4. *Les couleurs des galaxies lointaines.* La question reste ouverte de savoir si les couleurs des galaxies lointaines sont correctement prédites. Cela semble être plus ou moins le cas pour les objets qui forment activement des étoiles et ont des extinctions modérées, comme les LBGs mentionnées plus haut. En revanche, les comptages observationnels de galaxies faibles détectées en raison de leurs couleurs très rouges (les *Extremely Red Objects* ou EROs) ne semblent pas être ajustés par les modèles semi–analytiques. Ces objets sont situés typiquement à des redshifts z de 1 à 2 et sont, ou des elliptiques, ou les contreparties optiques de LIRGs et d'ULIRGs. En fait, ce ne sont pas tant les densités prédites qui sont incorrectes que les luminosités (et/ou les couleurs) qui sortent des modèles. Ces objets semblent avoir déjà les luminosités et les couleurs des elliptiques locales alors que le paradigme hiérarchique prédit que les fusions vont continuer à faire grossir les galaxies entre $z = 1$ et $z = 0$. Le taux de fusion dans les modèles est d'ailleurs suffisant pour reproduire des galaxies elliptiques locales qui ont les bonnes luminosités. La solution de ce problème n'est pas claire. Elle pourrait venir d'une meilleure prise en compte des épisodes primordiaux de formation d'étoiles, ou bien de variations dans la fonction de masse initiale.

En tout état de cause, même si bien des points restent à améliorer, le scénario hiérarchique fournit un cadre unificateur pour l'ensemble des propriétés statistiques des galaxies, à partir de quelques processus physiques bien repérés, qui peuvent être modélisés simplement dans les approches semi–analytique ou hybride. Ces travaux servent de précurseur pour les simulations numériques hydrodynamiques à venir, qui pour l'instant ne permettent pas de descendre très profondément dans la fonction de luminosité. Enfin, cette méthode permet de générer des catalogues et cartes dans lesquels les effets de sélection peuvent être explicitement introduits. Bien sûr, il est toujours possible de générer catalogues et cartes selon des méthodes phénoménologiques pour analyser des observations, ou tester des algorithmes de traitement d'image. Mais il existe maintenant la possibilité de créer des populations de galaxies pour lesquelles nous savons exactement quelle est la physique qui les gouverne, et si elles peuvent, ou non, exister à tel ou tel décalage spectral, dans un cadre cosmologique explicite. Il est probable que ce genre d'outil deviendra un standard d'analyse et de simulation d'observations dans les années qui viennent.

Ces méthodes bénéficient aussi des progrès récents dans la détermination des paramètres cosmologiques du modèle du Big Bang. On connaît actuellement une sorte de consensus autour du modèle ΛCDM, et les paramètres cosmologiques qui servent pour lancer les simulations numériques cosmologiques sont supposés être maintenant connus avec une précision meilleure que 10 %. Une telle situation est tout à fait nouvelle. Les prédictions quantitatives désormais nombreuses et précises doivent être testées grâce aux observations de galaxies lointaines à différentes longueurs d'onde. De ce point de vue, les années à venir seront passionnantes, avec les relevés profonds spectroscopiques effectués par les instruments du *Very Large Telescope* comme VIRMOS et GIRAFFE, et l'étude approfondie des galaxies LIRGs et ULIRGs qui sera rendue possible par les observations des satellites submillimétriques HERSCHEL et PLANCK.

Références

[1] Butcher, H, Oemler, A., Jr, 1978, *ApJ*, 219, 18
[2] Butcher, H, Oemler, A., Jr, 1984, *ApJ*, 285, 426
[3] Lilly, S., 1988, *ApJ*, 333, 161
[4] Chambers, K.C., Miley, G.K., Van Breugel, W.J., 1990, *ApJ*, 363, 21
[5] Broadhurst, T.J., Ellis, R.S., Shanks, T., 1988, *MNRAS*, 235, 827
[6] Tyson, A., 1988, *AJ*, 96, 1
[7] Ashby, M.L.N., Hacking, P.B., Houck, J.R., Soifer, B.T., Weisstein, E.W., 1996, *ApJ*, 456, 428
[8] Koo, D.C., 1986, *Spectral Evolution of Galaxies*, C. Chiosi & A. Renzini éditeurs, Reidel
[9] Eggen, O.J., Lynden–Bell, D., Sandage, A., 1962, *ApJ*, 136, 748
[10] Sandage, A., Freeman, K.C., Stokes, N.R., 1970, *ApJ*, 160, 831
[11] Tinsley, B.M., 1972, *A&A*, 20, 383
[12] Searle, L., Sargent, W.L.W., Bagnuolo, W.G., 1973, *ApJ*, 179, 427
[13] Larson, R.B., 1974, *MNRAS*, 166, 585
[14] Dressler, A., 1980, *ApJ*, 236, 351

[15] Dressler, A., 1984, *ARAA*, 22, 185
[16] Toomre, A., Toomre, J., 1972, *ApJ*, 178, 623
[17] Kent, S.M., 1981, *ApJ*, 245, 805
[18] Sanders, D.B., Mirabel, I.F., 1996, *ARAA*, 34, 749
[19] Blumenthal, G.R., Faber, S.M., Primack, J.R., Rees, M.J., 1984, *Nature*, 311, 517
[20] Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C., White, S., 1985, *ApJ*, 292, 371
[21] White, S., Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C., 1987a, *Nature*, 330, 451
[22] White, S., Frenk, C., Davis, M., Efstathiou, G., 1987b, *ApJ*, 313, 505
[23] Press, W. H., Schechter, P., 1974, *ApJ*, 187, 425
[24] Bardeen, J. M, Bond, J. R., Kaiser, N., Szalay, A. S., 1986, *ApJ*, 304, 15
[25] Binney, J., 1977, *ApJ*, 215, 483
[26] Rees, M.J., Ostriker, J.P., 1977, *MNRAS*, 179, 541
[27] Silk, J., 1977, *ApJ*, 211, 638
[28] Fall, S.M., Efstathiou, G., 1980, *MNRAS*, 193, 189
[29] Toomre, A., 1964, *ApJ*, 139, 121
[30] Dekel, A., Silk, J., 1986, *ApJ*, 303, 39
[31] White, S.D.M., Rees, M.J., 1978, *MNRAS*, 183, 341
[32] Schaeffer, R., Silk, J., 1985, *ApJ*, 292, 319
[33] Lilly, S.J., Le Fèvre, O., Crampton, D., Hammer, F., Tresse, L., 1995, *ApJ*, 455, 50
[34] Griffiths, R.E., Ratnatunga, K.U., Neuschaefer, L.W., Casertano, S., Im, M., Wyckoff, E.W., Ellis, R.S., *et al.*, 1994, *ApJ*, 437, 67
[35] Williams, R.E., Blacker, B., Dickinson, M., van Dyke Dixon, W., Ferguson, H.C., Fruchter, A.S., Giavalisco, M., Gilliland, R.L., Heyer, I., Katsanis, R., Levay, Z., Lucas, R.A., McElroy, D.B., Petro, L., Postman, M., 1996, *AJ*, 112, 1335
[36] Steidel, C.C., Hamilton, D., 1993, *AJ*, 105, 2017
[37] Cowie, L.L., Hu, E.M., 1998, *AJ*, 115, 1319
[38] Hu, E.M., Cowie, L.L., McMahon, R.G., 1998, *ApJ*, 502, L99
[39] Spinrad, H., Stern D., Bunker, A., Dey, A., Lanzetta, K., Yahil, A., Pascarelle, S., Fernández–Soto, A., 1998, *AJ*, 116, 2617
[40] Hu, E.M., McMahon, R.G., Cowie, L.L., 1999, *ApJ*, 522, L9
[41] Chen, H.W., Lanzetta, K.M., Pascarelle, S., 1999, *Nature*, 398, 586
[42] Lilly, S.J., Le Fèvre, O., Hammer, F., Crampton, D., 1996, *ApJ*, 460, L1

[43] Madau, P., Ferguson, H.C., Dickinson, M.E., Giavalisco, M., Steidel, C.C., Fruchter, A., 1996, *MNRAS*, 283, 1388

[44] Madau, P., Pozzetti, L., Dickinson, M.E., 1998, *ApJ*, 498, 106

[45] Steidel, C.C., Giavalisco, M., Pettini, M., Dickinson, M., Adelberger, K.L., 1996, *ApJ*, 462, L17

[46] Steidel, C.C., Adelberger, K.L., Giavalisco, M., Dickinson, M., Pettini, M., 1999, *ApJ*, 519, 1

[47] Lanzetta, K.M., Wolfe, A.M., Turnshek, D.A., 1995, *ApJ*, 440, 435

[48] Storrie–Lombardi, L.J., McMahon, R.G., Irwin, M.J., 1996, *MNRAS*, 283, L79

[49] Pettini, M., Smith, L.J., King, D.L., Hunstead, R.W., 1997, *ApJ*, 486, 665

[50] Abraham, R.G., Tanvir, N.R., Santiago, B.X., Ellis, R.S., Glazebrook, K., van den Bergh, S., 1996, *MNRAS*, 279, L47

[51] Pascarelle, S.M., Windhorst, R.A., Keel, W.C., Odewahn, S.C., 1996, *Nature*, 383, 45

[52] Zepf, S.E., 1997, *Nature*, 390, 377

[53] Driver, S.P., Fernández–Soto, A., Couch, W.J., Odewahn, S.C., Windhorst, R.A., Philipps, S., Lanzetta, K., Yahil, A., 1998, *ApJ*, 496, L93

[54] Barger, A.J., Cowie, L.L., Trentham, N., Fulton, E., Hu, E.M., Songaila, A., Hall, D., 1999b, *AJ*, 117, 102

[55] Puget, J.L., Abergel, A., Bernard, J.P., Boulanger, F., Burton, W.B., Désert, F.X., Hartmann, D., 1996, *A&A*, 308, L5

[56] Guiderdoni, B., Bouchet, F.R., Puget, J.L., Lagache, G., & Hivon, E., *Nature*, 390, 257

[57] Schlegel, D.J., Finkbeiner, D.P., Davis, M., 1998, *ApJ*, 500, 525

[58] Fixsen, D.J., Dwek, E., Mather, J.C., Bennett, C.L., Shafer, R.A., 1998, *ApJ*, 508, 123

[59] Hauser, M.G., Arendt, R., Kelsall, T., Dwek, E., Odegard, N., Welland, J., Freundenreich, H., Reach, W., Silverberg, R., Modeley, S., Pei, Y., Lubin, P., Mather, J., Shafer, R., Smoot, G., Weiss, R., Wilkinson, D., Wright, E., 1998, *ApJ*, 508, 25

[60] Lagache, G., Abergel, A., Boulanger, F., Désert, F.X., Puget, J.L., 1999, *A&A*, 344, 322

[61] Soifer, B.T., Neugebauer, G., 1991, *AJ*, 101, 354

[62] Oliver, S.J., Goldschmidt, P., Franceschini, A., Serjeant, S.B.G., Efstathiou, A.N., Verma, A., Gruppioni, C., Eaton, N., Mann, R.G., Mobasher, B., Pearson, C.P., Rowan–Robinson, M., Sumner, T.J., Danese, L., Elbaz, D., Egami, E., Kontizas, M., Lawrence, A., McMahon, R., Norgaard–Nielsen, H.U., Perez–Fournon, I., Gonzalez–Serrano, J.I., 1997, *MNRAS*, 289, 471

[63] Aussel, H., Cesarsky, C.J., Elbaz, D., Starck, J.L., 1999, *A&A*, 342, 313

[64] Elbaz, D., Cesarsky, C.J., Fadda, D., Aussel, H., Desert, F.X., Franceschini, A., Flores, H., Harwit, M., Puget, J.L., Starck, J.L., Clements, D.L., Danese, L., Koo, D.C., Mandolesi, R., 1999, *A&A*, 351, L37

[65] Kawara, K., Sato, Y., Matsuhara, H., Taniguchi, Y., Okuda, H., Sofue, Y., Matsumoto, T., Wakamatsu, K., Karoji, H., Okamura, S., Chambers, K.C., Cowie, L.L., Joseph, R.D., Sanders, D.B., 1998, *A&A*, 336, L9

[66] Puget, J.L., Lagache, G., Clements, D.L., Reach, W.T., Aussel, H., Bouchet, F.R., Cesarsky, C., Désert, F.X., Dole, H., Elbaz, D., Franceschini, A., Guiderdoni, B., & Moorwood, A.F.M. *Astron. Astrophys.*, 345, 29–35

[67] Smail, I., Ivison, R.J., Blain, A.W., 1997, *ApJ*, 490, L5

[68] Barger, A.J., Cowie, L.L., Sanders, D.B., Fulton, E., Taniguchi, Y., Sato, Y., Kawara, K., Okuda, H., 1998, *Nature*, 394, 248

[69] Hughes, D., Serjeant, S., Dunlop, J., Rowan–Robinson, M., Blain, A., Mann, R.G., Ivison, R., Peacock, J., Efstathiou, A., Gear, W., Oliver, S., Lawrence, A., Longair, M., Goldschmidt, P., Jenness, T., 1998, *Nature*, 394, 241

[70] Eales, S., Lilly, S., Gear, W., Dunne, L., Bond, J.R., Hammer, F., Le Fèvre, O., Crampton, D., 1999, *ApJ*, 515, 518

[71] Barger, A.J., Cowie, L.L., Sanders, D.B., 1999a, *ApJ*, 518, L5

[72] Smail, I., Ivison, R.J., Blain, A.W., Kneib, J.P., 1998, *ApJ*, 507, L21

[73] Lilly, S.J., Eales, S.A., Gear, W.K.P., Hammer, F., Le Fèvre, O., Crampton, D., Bond, J.R., Dunne, L., 1999, *ApJ*, 518, 641

[74] Barger, A.J., Cowie, L.L., Smail, I., Ivison, R.J., Blain, W., Kneib, J.P., 1999c, *AJ*, 117, 2656

[75] Flores, H., Hammer, F., Thuan, T.X., Cesarsky, C., Désert, F.X., Omont, A., Lilly, S.J., Eales, S., Crampton, D., Le Fèvre., O., 1999, *ApJ*, 517, 148

[76] Meurer, G.R., Heckman, T.M., Calzetti, D., 1999, *ApJ*, 521, 64

[77] Omont, A., Petitjean, P., Guilloteau, S., McMahon, R.G., Solomon, P.M., Pécontal, E., 1996, *Nature*, 382, 428

[78] Hughes, D., Dunlop, J.S., Rawlings, S., 1997, *MNRAS*, 289, 766

[79] Soifer, B.T., Neugebauer, G., Franx, M., Matthews, K., Illingworth, G.D., 1998, *ApJ*, 501, L171

[80] Armus, L., Matthews, K., Neugebauer, G., Soifer, B.T., 1998, *ApJ*, 506, L89

[81] Bernardeau, F., 1998, *Notes de Cours*, `astro-ph/9804230`

[82] Peebles, P.J.E., 1980, *The large-scale structure of the Universe*, Princeton University Press
[83] Peebles, P.J.E., 1993, *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press
[84] Padmanabhan, T., 1993, *Structure formation in the Universe*, Cambridge University Press
[85] Peacock, J., 1999, *Cosmological physics*, Cambridge University Press
[86] Hubble, E., Humason, M.L., 1931, *ApJ*, 74, 43
[87] Penzias, A.A., Wilson, R.W., 1965, *ApJ*, 142, 419
[88] Efstathiou, G., Bond, J. R., 1986, *MNRAS*, 218, 103
[89] Peebles, P.J.E., 1982, *ApJ*, 258, 415
[90] Gaztañaga, E., Baugh, C. M., 1998, *MNRAS*, 294, 229
[91] Sugiyama, N., 1995, *ApJS*, 100, 281
[92] Colombi, S., Dodelson, S., Widrow, L.M. , 1996, *ApJ*, 458, 1
[93] Lemaître, G., 1933, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, A53, 51
[94] Zel'dovich, Ya. B., 1965, *Adv. Astr. Ap.*, 3, 241
[95] Heath, D. J., 1977, *MNRAS*, 179, 351
[96] Birkhoff, G. D., 1923, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press
[97] Richstone, D., Loeb, A., Turner, E. L., 1992, *ApJ*, 393, 477
[98] Moutarde, F., Alimi, J.-M., Bouchet, F.R., Pellat, R., Ramani, A., 1991, *ApJ*, 382, 377
[99] Moutarde, F., Alimi, J.-M., Bouchet, F.R., Pellat, R., 1995, *ApJ*, 441, 10
[100] Fillmore, J.A., Goldreich, P., *ApJ*, 281, 1
[101] Lynden-Bell, D., 1967, *MNRAS*, 136, 101
[102] Binney, J.J., Tremaine, S., 1987, *Galactic dynamics*, Princeton University Press
[103] Lahav, O., Rees, M. J., Lilje, P. B., Primack, J. R., 1991, *MNRAS*, 251, 128
[104] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M., 1997, *ApJ*, 490, 493
[105] Ninin, S., 1999, *Thèse de doctorat*, Université de Paris 11
[106] Watkins, R. , 1997, *MNRAS*, 292, L59
[107] Bond, J. R., 1988, *The Early Universe*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 283
[108] Bond, J. R., Myers, S. T., 1996, *ApJS*, 103, 1
[109] Bond, J. R., Myers, S. T., 1996, *ApJS*, 103, 41
[110] Hanami, H., 2001, *MNRAS*, 327, 721
[111] Bond, J. R., Cole, S., Efstathiou, G., Kaiser, N., 1991, *ApJ*, 379, 440

[112] Lacey, C., Cole, S., 1993, *MNRAS*, 262, 627
[113] Chandrasekhar, S., 1943, *Rev. Mod. Phys.*, 15, 2
[114] Lacey, C., Cole, S., 1994, *MNRAS*, 271, 676
[115] Zel'dovich, Ya. B., 1970, *A&A*, 5, 84
[116] Barnes, J., Hut, P., 1986, *Nature*, 324, 446
[117] Bouchet, F. R., Hernquist, L., 1988, *ApJS*, 68, 521
[118] Gross, M. A. K., Somerville, R. S., Primack, J. R., Holtzman, J., Klypin, A., 1998, *MNRAS*, 301, 81
[119] Peebles, P.J.E., 1969, *ApJ*, 155, 393
[120] White, S. D. M., 1996, *Cosmology and Large Scale Structure*, Dordrecht Elsevier
[121] Barnes, J., Efstathiou, G., 1987, *ApJ*, 319, 575
[122] Chièze, J.-P., Alimi, J.-M., Teyssier, R., 1998, *ApJ*, 495, 630
[123] Mestel, L., 1963, *MNRAS*, 126, 553
[124] Freeman, K. C., 1970, *ApJ*, 160, 811
[125] Dalcanton, J. J., Spergel, D. N., Summers, F. J., 1997, *ApJ*, 482, 659
[126] Mo, H. J., Mao, S., White, S. D. M., 1998, *MNRAS*, 295, 319
[127] Bosma, A., 1981, *AJ*, 86, 1825
[128] Mihos, J. C., 1995, *ApJL*, 438, L75
[129] Walker, I. R., Mihos, J. C., Hernquist, L., 1996, *ApJ*, 460, 121
[130] Kauffmann, G. A. M., White, S. D. M., Guiderdoni, B., 1993, *MNRAS*, 264, 201
[131] Cole, S., Aragon-Salamanca, A., Frenk, C. S., Navarro, J. F., Zepf, S. E., 1994, *MNRAS*, 271, 781
[132] Semelin, B., Combes, F., 2002, *A&A*, 388, 826
[133] Pahre, M. A., Djorgovski, S. G., De Carvalho, R. R., 1995, *ApJL*, 453, L17
[134] Dubinski, J., 1998, *ApJ*, 502, 141
[135] Kennicutt, R. C., 1998, *ApJ*, 498, 541
[136] Salpeter, E. E., 1955, *ApJ*, 121, 161
[137] Larson, R. B., 1998, *MNRAS*, 301, 569
[138] Scalo, J., 1998, *ASP Conf. Ser. 142 : The Stellar Initial Mass Function*, 201
[139] Thornton, K., Gaudlitz, M., Janka, H.-T., Steinmetz, M., 1998, *ApJ*, 500, 95
[140] Efstathiou, G., 1992, *MNRAS*, 256, 43P
[141] Blanchard, A., Valls-Gabaud, D., Mamon, G. A., 1992, *A&A*, 264, 365

[142] Maeder, A., 1992, *A&A*, 264, 105
[143] Renzini, A., Voli, M., 1981, *A&A*, 94, 175
[144] Ferrini, F., Matteucci, F., Pardi, C., Penco, U., 1992, *ApJ*, 387, 138
[145] Nomoto, K., Tsujimoto, T., Yoshii, Y., Hashimoto, M., 1995, *The Interplay between Massive Star Formation, the I.S.M. and Galaxy Evolution*, Editions Frontières, 83
[146] Guiderdoni, B., Rocca-Volmerange, B., 1987, *A&A*,
[147] Charlot, S., Bruzual, G., 1991, *ApJ*, 367, 126
[148] Makino, J., Hut, P., *ApJ*, 481, 83
[149] de Vaucouleurs, G.H., 1953, *MNRAS*, 113, 134
[150] Pearce, F. R., Jenkins, A., Frenk, C. S., Colberg, J. M., White, S. D. M., Thomas, P. A., Couchman, H. M. P., Peacock, J. A., Efstathiou, G., 1999, *ApJL*, 521, 99
[151] Lacey, C.G., Silk, J., 1991, *ApJ*, 381, 14
[152] White, S.D.M., Frenk, C.S., 1991, *ApJ*, 379, 52
[153] Lacey, C.G., Guiderdoni, B., Rocca–Volmerange, B., Silk, J., 1993, *ApJ*, 402, 15
[154] Kauffmann, G., Guiderdoni, B., White, S.D.M., 1994, *MNRAS*, 267, 981
[155] Somerville, R.S., Primack, J.R., 1999, *MNRAS*, 310, 1087
[156] Cole, S., Lacey, C.G., Baugh, C.M., Frenk, C.S., 2000, *MNRAS*, 319, 168
[157] Pearce, F. R., Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S.D.M., Thomas, P. A., Couchman, H. M. P., Peacock, J. A., Efstathiou, G., 2001, *MNRAS*, 326, 649
[158] Kauffmann, G., Nusser, A., Steinmetz, M., 1997, *MNRAS*, 286, 795
[159] Benson, A.J., Cole, S., Frenk, C.S., Baugh, C.M., Lacey, C.G., 2000, *MNRAS*, 311, 793
[160] Governato, F., Ghigna, S., Moore, B., Quinn, T., Stadel, J., Lake, G., 2001, *ApJ*, 547, 555
[161] White, S.D.M., Davis, M., Efstatathiou, G., Frenk, C.S., 1987, *Nature*, 330, 451
[162] Roukema, B.F., Peterson, B.A., Quinn, P.J., Rocca–Volmerange, B., 1997, *MNRAS*, 292, 835
[163] Kauffmann, G., Colberg, J.M., Diaferio, A., White, S.D.M., 1999, *MNRAS*, 303, 188
[164] Benson, A.J., Pearce, F.R., Frenk, C.S., Baugh, C.M., Jenkins, A., 2001, *MNRAS*, 320, 261
[165] Helly, J.C., Cole, S., Frenk, C.S., Baugh, C.M., Benson, A., Lacey, C.G., Pearce, F.R., 2003, *MNRAS*, 338, 913

[166] Hatton, S., Devriendt, J.E.G., Ninin, S., Bouchet, F.R., Guiderdoni, B., Vibert, D., 2003, *MNRAS*, *sous presse*

[167] Devriendt, J.E.G., Guiderdoni, B., Sadat, R., *A&A*, 450, 381

[168] Lobo, C., Guiderdoni, B., 1999, *A&A*, 345, 712

[169] Stickel, M., Lemke, D., Klaas, U., Beichman, C.A., Rowan–Robinson, M., Efstathiou, A., Bogun, S., Kessler, M.F., Richter, G., 2000, *A&A*, 359, 865