Formation planétaire et exoplanètes Ecole CNRS de Goutelas XXVIII (2005) Edité par J.L. Halbwachs, D. Egret et J.M. Hameury

# Migration des planètes

## Caroline E. J. M. L. J. Terquem

Institut d'Astrophysique de Paris, UMR7095 CNRS, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris Université Denis Diderot-Paris 7, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5 Institut Universitaire de France

**Abstract.** We review theories of planet migration. We outline the calculation of the tidal torque (leading to orbital drift) based on the linear analysis of the waves excited by a small mass planet, and we present the calculation of the criteria for gap opening by a more massive planet.

## Table des matières

1.	Intr	roduction	132
2.	2. Migration de type I		133
	2.1	Equations de base et état d'équilibre	133
	2.2	Potentiel perturbateur	134
	2.3	Linéarisation des équations de base : calcul de la réponse	
		du disque	135
	2.4	Couple de marée	137
	2.5	Flux de moment cinétique	141
	2.6	Dérive orbitale	143
3.	Migration de type II		146
	3.1	Création d'un sillon : premier critère	146
	3.2	Maintien du sillon : second critère	147
	3.3	Dérive orbitale	150
4.	4. Conclusion		152

## 1. Introduction

La découverte de planètes géantes extrasolaires sur des orbites dont le rayon est très faible (de quelques centièmes d'unités astronomiques, ua) a mis en évidence le rôle important de la migration orbitale des planètes lors des étapes de formation. En effet, les planètes géantes sont supposées avoir un cœur solide composé de matériaux qui ne peuvent condenser si près de l'étoile parente (voir le chapitre sur la formation des planètes). Il est donc très probable que ces planètes se soient formées plus loin dans la nébuleuse et aient migré vers l'intérieur pendant et/ou après leur formation.

Jusqu'à présent, trois mécanismes ont été proposés pour expliquer la présence de planètes géantes sur des orbites serrées. L'un d'eux requiert l'interaction gravitationnelle entre au moins deux planètes géantes. Du fait de cette interaction, les orbites se croisent, ce qui peut résulter en l'éjection de l'un des objets alors que l'autre se retrouve sur une orbite serrée (Rasio & Ford 1996, Weidenschilling & Marzari 1996). Ce mécanisme ne peut cependant expliquer le nombre important (environ 20%) de planètes de courtes périodes détectées. Un autre mécanisme est celui dit de 'l'instabilité de migration' (Murray et al 1998, Malhotra 1993). Il est basé sur l'interaction résonante entre une planète et les planétésimaux situés à l'intérieur de son orbite, qui conduit à l'éjection d'une partie d'entre eux et à la migration simultanée de la planète vers l'intérieur. Pour amener une planète de la masse de Jupiter  $(M_{I})$  de 5 ua à des distances très faibles de l'étoile cependant, il faut un disque contenant une masse comparable de planétésimaux à l'intérieur de l'orbite, qui puisse absorber le moment cinétique orbital de la planète. La masse correspondante de gaz est alors de l'ordre d'un dixième de masse solaire à l'intérieur de 5 ua. Les disques ne sont pas observés être aussi massifs, et un tel disque serait de toute façon à la limite de la stabilité gravitationnelle. Le troisième mécanisme, qui fait l'objet de ce chapitre, est basé sur l'interaction gravitationnelle entre la planète et le gaz du disque dans lequel elle est enfouie (Goldreich & Tremaine 1979, 1980; Lin & Papaloizou 1979, 1993 et références; Papaloizou & Lin 1984; Ward 1986, 1997).

Il y a trois types de migration associés à ce mécanisme : (i) la migration de type I, qui s'applique à des planètes de faibles masses (jusqu'à environ 10 masses terrestres) pour lesquelles la réponse du disque est linéaire (Goldreich & Tremaine 1979; Ward 1997), (ii) la migration de type II, qui s'applique à des planètes suffisamment massives pour ouvrir un sillon (masses supérieures à environ 1  $M_J$ ; Lin & Papaloizou 1986) et (iii) la migration de type III ou migration qui 's'emballe', qui s'applique à des planètes dont la masse va d'une fraction de celle de Saturne à ~ 1  $M_J$  et qui sont dans des disques massifs (Masset & Papaloizou 2003, Artymowicz 2004). Dans tous les cas, la migration est induite par un échange de moment cinétique entre le mouvement de rotation du gaz dans le disque et le mouvement orbital de la planète dû au couple gravitationnel exercé par la planète sur le disque. La migration de type I résulte du transport du moment cinétique par les ondes de densité excitées par la planète vers l'extérieur du disque. Comme les ondes n'interagissent pas avec l'état d'équilibre du disque, celui–ci n'est pas affecté par la perturbation et la planète migre par rapport au gaz. La migration de type II, quant à elle, résulte de la dissipation de ces ondes dans des chocs dus à des non–linéarités dans le voisinage immédiat de la planète. Le moment cinétique étant alors transféré au gaz du disque, celui–ci est repoussé de part et d'autre de l'orbite de la planète et un sillon se forme. Enfin, la migration de type III résulte d'un échange direct de moment cinétique avec le gaz qui traverse l'orbite de la planète.

Ce chapitre n'est pas une revue sur l'influence de la migration sur la formation et l'évolution des systèmes planétaires. Beaucoup de compte-rendus de conférences traitent de ces sujets. S'agissant d'un compte-rendu d'école, ce texte a plutôt pour objectif de présenter les mécanismes physiques qui régissent la migration des planètes. Le lien entre ces mécanismes et les observations de planètes extrasolaires sont un sujet de recherche très actif et en évolution rapide. Il paraît donc plus utile ici de s'attacher à présenter des processus physiques bien établis, pour donner au lecteur les moyens d'examiner avec un esprit critique les recherches dans ce domaine, que d'exposer des scénarios dont les ingrédients changent rapidement au gré des résultats observationnels. Les mécanismes de migration sont relativement bien compris, mais l'environnement des planètes lors de leur formation étant mal connu, il est encore difficile à ce jour de faire des modèles rendant compte de toutes les observations. Dans ce qui suit, nous allons donc décrire en détail la migration de type I et II, en essayant de donner au lecteur les outils permettant de faire les calculs d'interaction gravitationnelle entre une planète et un disque environnant.

#### 2. Migration de type I

## 2.1 Equations de base et état d'équilibre

Si le disque est fin (c'est-à-dire sa demi-épaisseur H(r) à un rayon r est très petite devant r), les différentes variables décrivant le disque peuvent être moyennées sur son épaisseur. Dans ces conditions, les équations du mouvement et de conservation de la masse peuvent s'écrire sous la forme :

Caroline Terquem

$$\Sigma \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \mathbf{v} \right) = -\boldsymbol{\nabla} P - \Sigma \boldsymbol{\nabla} \Psi, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0, \qquad (2)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'écoulement, P est la pression moyennée sur l'épaisseur du disque,  $\Sigma$  est la densité surfacique de masse et  $\Psi$  est le potentiel gravitationnel, pour lequel la dépendance en la coordonnée verticale z est négligée. Le disque est supposé peu massif, de sorte que son auto-gravité est négligeable. Le potentiel  $\Psi$  est alors créé par l'étoile centrale de masse  $M_*$ .

Pour clore le système d'équations, on adopte une équation d'état barotropique :

$$P = P\left(\Sigma\right).\tag{3}$$

La vitesse du son c est alors donnée par :

$$c^2 = \frac{dP}{d\Sigma}.$$
(4)

Dans la suite, on adopte un système de coordonnées polaires cylindriques  $(r, \varphi)$  fixe avec pour origine la masse centrale. A l'équilibre, le disque est à symétrie cylindrique et en rotation autour de l'étoile centrale, de sorte que  $\mathbf{v} = (0, r\Omega(r))$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire.

#### 2.2 Potentiel perturbateur

L'état d'équilibre est perturbé par une planète de masse  $M_p \ll M_*$ en rotation sur une orbite circulaire de rayon  $r_p$  à la vitesse angulaire  $\Omega_p \simeq \sqrt{GM_*/r_p^3}$ . Au point de coordonnées  $(r, \varphi)$  dans le disque, elle exerce le potentiel gravitationnel :

$$\Psi'_p(r,\varphi,t) = \Psi'_p(r,\phi) = -\frac{GM_p}{\left(r_0^2 + r_p^2 + r^2 - 2rr_p\cos\phi\right)^{1/2}},$$
 (5)

où  $\phi = \varphi - \Omega_p t$  et  $r_0$  est une longueur de *softening*, nécessaire pour éviter la singularité en  $r = r_p$  et  $\phi = 0$  introduite par l'approximation qui consiste à négliger l'épaisseur du disque.

Ainsi que nous le verrons ci–dessous, il est utile de décomposer  $\Psi_p'$  en série de Fourier par rapport à la variable  $\phi$  :

$$\Psi'_p(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi'_m(r) \cos m\phi, \qquad (6)$$

avec

$$\Psi'_{m\neq 0}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi'_p(r,\phi) \, \cos m\phi \, d\phi$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\Psi_0'(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Psi_p'(r,\phi) \ d\phi$$

## 2.3 Linéarisation des équations de base : calcul de la réponse du disque

Lorsque la planète a une masse suffisamment faible, la perturbation qu'elle exerce sur le disque est linéaire (régime de migration de type I). Alors toute fonction décrivant le disque peut se mettre sous la forme  $X(r, \varphi, t) + X'(r, \varphi, t)$ , où X est la fonction à l'équilibre et le symbole prime dénote une perturbation Eulérienne. Comme le disque à l'équilibre est à symétrie cylindrique et stationnaire, les perturbations peuvent être décomposées en série de Fourier par rapport à la variable  $\phi$  et les équations peuvent être résolues indépendamment pour chaque valeur de m. Le problème général est donc de calculer la réponse du disque à la partie réelle d'un potentiel complexe de la forme  $\Psi'_m(r)\exp[i(m\varphi - \omega t)]$ , où l'amplitude  $\Psi'_m$  est réelle (car  $\int_0^{\pi} \Psi'_p(r, \phi) \sin m\phi d\phi = 0$ ) et la fréquence  $\omega \equiv m\Omega_p$ , et de faire la somme sur toutes les valeurs de m. Il est commode de rendre les perturbations Eulériennes complexes en écrivant :

$$X'(r,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty} X'_m(r) e^{i(m\varphi - \omega t)}.$$
(7)

Les perturbations physiques correspondent alors à la partie réelle de ces quantités complexes.

La linéarisation des équations (1) et (2) donne :

$$im\sigma v'_{mr} - 2\Omega v'_{m\varphi} = -\frac{d}{dr} \left(\Psi'_m + W'_m\right),\tag{8}$$

$$im\sigma v'_{m\varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v'_{mr} = -\frac{im}{r} \left( \Psi'_m + W'_m \right), \tag{9}$$

$$\frac{im\sigma W'_m}{c^2} = -\frac{1}{r\Sigma} \frac{d}{dr} \left( r\Sigma v'_{mr} \right) - \frac{imv'_{m\varphi}}{r},\tag{10}$$

où  $\sigma \equiv \Omega - \Omega_p$ ,  $W' = \Sigma' c^2 / \Sigma$  est la perturbation linéaire de l'enthalpie et  $\kappa$  est la fréquence épicyclique, définie par :

$$\kappa^2 = \frac{2\Omega}{r} \frac{d\left(r^2\Omega\right)}{dr}.$$

Dans un disque Képlérien,  $\kappa = \Omega$ . Le système d'équations (8)–(10) peut être résolu numériquement avec des conditions limites appropriées pour le calcul de  $v'_{mr}$ ,  $v'_{m\varphi}$  et  $W'_m$ . Il est également possible, à partir de ce système, d'obtenir l'équation différentielle du second degré satisfaite par l'une de ces fonctions (Goldreich & Tremaine 1979, Artymowicz 1993).

Cette équation du second degré a une singularité au rayon où  $\sigma = 0$ , c'est-à-dire en  $r = r_p$ , appelée *résonance de corotation*. Les particules situées à la corotation peuvent répondre de façon séculaire à une perturbation de fréquence  $\Omega_p$  et rester donc exactement en phase avec la perturbation (elles 'surfent' l'onde de marée, voir Lynden-Bell & Kaljnas 1972).

Les solutions sont évanescentes autour de cette résonance de corotation, et deviennent ondulatoires de part et d'autre de l'orbite de la planète au-delà des positions appelées *résonances de Lindblad effectives*, qui sont des points de rebroussement (il ne s'agit pas de singularités, contrairement à la résonance de corotation). Ces résonances sont situées aux rayons  $r_{\rm eff}$  donnés par (Ward 1986, Artymowicz 1993) :

$$\kappa^2 - m^2 \sigma^2 + m^2 c^2 / r^2 = 0. \tag{11}$$

Comme  $c \simeq \Omega H$ , le troisième terme du membre de gauche est négligeable devant les deux premiers lorsque  $m \lesssim r/H$ , et les points de rebroussement coïncident alors avec les résonances de Lindblad usuelles, dites *nominales* ici pour les différencier des résonances effectives. Rappelons que les résonances de Lindblad nominales sont les rayons  $r_{\rm LR}$  où  $\kappa^2 - m^2 \sigma^2 = 0$ , c'est-à-dire où la fréquence de la perturbation dans le référentiel en rotation avec le fluide,  $-m\sigma$ , est égale à la fréquence  $\pm \kappa$  des oscillations libres (épicycles) du gaz dans le disque. Pour chaque valeur de m, la résonance de Lindblad interne (externe) est le rayon inférieur (supérieur) à  $r_p$ , s'il existe, où  $m\sigma = \kappa (m\sigma = -\kappa)$ . Pour m > r/H, il y a un écart entre les résonances de Lindblad effectives et nominales. En particulier, lorsque  $m \to \infty$ ,  $|r_{\rm LR} - r_p| \to 0$  alors que  $|r_{\rm eff} - r_p| \to 2H/3$ . Ainsi que nous le verrons ci-dessous, ceci a d'importantes conséquences pour le couple gravitationnel exercé par la planète sur le disque.

Nous l'avons dit, la perturbation est ondulatoire au-delà des résonances de Lindblad effectives. Elle se propage vers les limites (interne et externe) du disque sous la forme d'ondes de densité, c'est-à-dire d'ondes acoustiques modifiées par la rotation (Lin & Shu 1964; Toomre

1981; voir également Bertin & Lin 1996 pour une description détaillée des ondes de densité et de leurs propriétés).

La figure 1 illustre la réponse du disque pour m = 10, une densité de masse uniforme et une vitesse du son uniforme et telle que  $c/(r_p\Omega_p) = H_p/r_p = 0.03$  (l'indice 'p' indiquant que les quantités doivent être évaluées en  $r = r_p$ ). Cette figure représente l'enthalpie  $W'_m$ , mais les résultats pour  $v'_{mr}$  et  $v'_{m\varphi}$  sont similaires. Pour avoir une réponse finie en  $r = r_p$ , la singularité a été légèrement déplacée de l'axe des réels (ce qui est équivalent à ajouter une viscosité). Les détails de la méthode utilisée pour résoudre le système d'équations (8)–(10), de même que de tous les résultats numériques présentés dans cette section, sont donnés dans Terquem (2003).

## 2.4 Couple de marée

La planète exerce un couple gravitationnel sur la perturbation, qui est responsable de l'échange de moment cinétique entre le mouvement de rotation du disque et le mouvement orbital de la planète.

Le couple exercé par la planète sur le disque entre les rayons  $r_1$  et  $r_2$  est :

$$\mathbf{T}\left(r_{1},r_{2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{T}_{m}\left(r_{1},r_{2}\right),$$

avec, en régime linéaire :

$$\mathbf{T}_{m}(r_{1}, r_{2}) = -\int_{r_{1}}^{r_{2}} \int_{0}^{2\pi} \operatorname{Re}\left[\Sigma + \Sigma_{m}' e^{im(\varphi - \Omega_{p}t)}\right] \mathbf{r} \times \operatorname{Re}\left[\mathbf{\nabla}\left(\Psi_{m}' e^{im(\varphi - \Omega_{p}t)}\right)\right] r d\varphi dr.$$
(12)

Du fait de la périodicité en  $\varphi$ , le terme du premier ordre est nul et le couple a seulement une composante verticale qui s'écrit :

$$T_m(r_1, r_2) = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{m}{2} \operatorname{Im}\left(\Sigma_m'^* \Psi_m'\right) \ r dr, \tag{13}$$

où l'astérisque dénote le complexe conjugué.

A l'intérieur des résonances de Lindblad effectives et en  $r \neq r_p$ , la réponse du disque est évanescente et en phase avec la perturbation, de sorte que  $\Sigma'_m \Psi'_m$  est réel. Au-delà des résonances de Lindblad effectives, la longueur d'onde de la perturbation est faible par rapport à l'échelle sur laquelle le potentiel perturbateur varie, et donc l'intégrale de  $r\Sigma'_m \Psi'_m$  sur le rayon est faible. Par conséquent, la contribution principale au couple donné par l'intégrale (13) vient des résonances (Lynden-Bell & Kalnajs



Figure 1.:  $W'_m/(r_p^2\Omega_p^2)$  en fonction de  $r/r_p$  pour m = 10,  $\Sigma = \text{cste}$ , c = cste et  $c/(r_p\Omega_p) = 0.03$ . Les parties réelle (ligne solide) et imaginaire (ligne pointillée) sont représentées. Les traits verticaux indiquent la position des résonances de Lindblad effectives et de corotation.

1972, Goldreich & Tremaine 1979). Une valeur approchée du couple total exercé par la planète sur le disque peut donc être obtenue en additionnant les couples exercés pour chaque valeur de m en ces résonances, lesquels sont calculés par la résolution asymptotique des équations (8)–(10) au voisinage des résonances. Les expressions analytiques de ces couples dits résonants, ou ponctuels, sont données dans Goldreich & Tremaine (1979) avec des corrections pour  $m \gtrsim r/H$  dans Ward (1989) et Artymowicz (1993).

Le couple exercé aux résonances de Lindblad effectives est positif (négatif) en  $r > r_p$  ( $r < r_p$ ). En effet, les particules situées en  $r > r_p$ ont une vitesse angulaire inférieure à celle de la planète. Par conséquent, elles gagnent du moment cinétique lors de l'interaction avec la planète. A l'opposé, les particules situées en  $r < r_p$ , et qui ont une vitesse angulaire supérieure, perdent du moment cinétique.

D'autre part, ce couple devient négligeable pour  $m \gg r/H$ . En effet, le potentiel perturbateur  $\Psi'_m$  est de plus en plus localisé autour de  $r_p$  au fur et à mesure que m augmente, alors que les résonances de Lindblad effectives restent localisées à une distance finie de  $r_p$  (voir ci-dessus). Le couplage entre le potentiel et la perturbation disparaît donc. C'est ce qu'on appelle le *torque cutoff*.

Le signe du couple de corotation, quant à lui, dépend du signe du gradient de la vortensité  $\kappa^2/(4\Omega\Sigma)$ . Il est nul lorsque ce gradient est nul. Ici encore, le couple devient négligeable pour les grandes valeurs de m.

Le couple exercé par la planète sur le disque peut également être calculé numériquement directement à partir de la formule (13) une fois les équations (8)–(10) résolues. Le couple ainsi obtenu ne contient pas seulement la contribution des résonances, mais de tout le disque. Pour le couple exercé en-dehors de la région de corotation, Korycansky & Pollack (1993) ont ainsi trouvé un accord relativement bon entre les résultats théorique et numérique. En revanche, l'expression analytique du couple de corotation tend à le surestimer.

La figure 2 représente les couples  $T_m(r_p, r)$  et  $T_m(r_{in}, r)$  (où  $r_{in}$  est le rayon interne du disque) calculés numériquement pour m = 10, une densité de masse et une vitesse du son uniformes et  $c/(r_p\Omega_p) = H_p/r_p =$ 0.03. Cette figure confirme que les régions du disque loin des résonances ne contribuent quasiment pas au couple  $(T_m(r_p, r) \text{ ou } T_m(r_{in}, r) \simeq \text{cste}$ loin des résonances).

Le couple total exercé sur le disque est  $T_m(r_{in}, r_{ext}) = T_m(r_p, r_{ext}) - T_m(r_p, r_{in})$ , où  $r_{ext}$  est le rayon externe du disque. Dans le cas particulier représenté sur la figure 2, ce couple est positif.



Figure 2.: Couple  $T_m/(\Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2)$  exercé par la planète sur le disque pour  $m = 10, \Sigma = \text{cste}, c = \text{cste}$  et  $c/(r_p \Omega_p) = 0.03$  (mêmes paramètres que pour la fig. 1). Figure du haut : couple exercé entre les rayons  $r_{in}$  et r en fonction de  $r/r_p$ . Figure du bas : couple exercé entre les rayons  $r_p$  et r en fonction de  $|r - r_p|/r_p$ . Les deux courbes correspondent à  $r > r_p$  (ligne solide) et  $r < r_p$  (ligne pointillée). Sur les deux figures, les traits verticaux indiquent la position des résonances de Lindblad effectives.

#### 2.5 Flux de moment cinétique

Le couple exercé par la planète sur le disque est associé à un flux de moment cinétique, qui s'écrit :

$$F_m(r) = \Sigma r^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left[v'_{m\varphi} e^{im(\varphi - \Omega_p t)}\right] \operatorname{Re}\left[v'_{mr} e^{im(\varphi - \Omega_p t)}\right] d\varphi, \qquad (14)$$

soit encore :

$$F_m(r) = \pi \Sigma r^2 \operatorname{Re}\left(v'_{mr} v'^*_{m\varphi}\right).$$
(15)

Le couple  $T(r_{in}, r)$  exercé entre les rayons  $r_{in}$  et r correspond à l'advection de moment cinétique à travers le disque  $(F(r) - F(r_{in}))$  et, éventuellement, au transfert d'une partie du moment cinétique  $(T(r_{in}, r) - F(r) + F(r_{in}))$  de la perturbation vers l'état d'équilibre du disque. Dans le cas général, ce transfert s'effectue soit lors de la dissipation des ondes due à une éventuelle viscosité ou à des chocs, soit à des singularités. Dans le cas linéaire, il n'y a pas de chocs et nous ne prenons pas en compte ici de viscosité.

Comme le couple ne s'exerce qu'aux résonances de Lindblad et de corotation, l'échange de moment cinétique entre la planète et le disque n'a lieu qu'à ces résonances. Il est d'autre part possible de montrer qu'il n'y a pas accumulation de moment cinétique au voisinage des résonances de Lindblad : les ondes de densité transportent vers l'extérieur du disque tout le moment cinétique que le couple exercé par la planète dépose dans le disque à ces résonances. En revanche, le moment cinétique déposé à la corotation par le couple n'est pas transporté vers l'extérieur, mais s'accumule dans le gaz, ce qui produit une discontinuité du flux de moment cinétique à cet endroit (Goldreich & Tremaine 1979).

La figure 3 représente le flux de moment cinétique pour m = 10, une vitesse du son uniforme,  $c/(r_p\Omega_p) = H_p/r_p = 0.03$  et une densité de masse uniforme ou  $\propto r^{-3/2}$ .

La discontinuité de  $F_m$  en  $r = r_p$  lorsque  $\Sigma$  = cste représente le couple de corotation. Le flux accumulé dans la résonance est  $F_m(r_p^-) - F_m(r_p^+)$ , et est égal au couple exercé par la planète en  $r = r_p$ . Le couple exercé aux résonances de Lindblad correspond quant à lui au moment cinétique advecté par les ondes à travers le disque,  $F_m(r_{ext}) - F_m(r_{in})$ . On vérifie bien sur la figure 3 que, lorsque  $\Sigma \propto r^{-3/2}$ , le couple de corotation est nul (car la vortensité est alors uniforme).

Comme le moment cinétique s'accumule en  $r = r_p$ , la résonance de corotation peut saturer. Ceci se produit si la libration des particules autour de l'orbite de la planète annule le gradient de vortensité. Pour



Figure 3.: Flux de moment cinétique  $F_m/(\Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2)$  pour m = 10, c = csteet  $c/(r_p \Omega_p) = 0.03$ . Figure du haut : Flux en fonction de  $|r - r_p|/r_p$ pour  $\Sigma = \text{cste}$  (mêmes paramètres que pour les fig. 1 et 2). Les deux courbes correspondent à  $r > r_p$  (ligne solide) et  $r < r_p$  (ligne pointillée). Le trait vertical indique la position des résonances de Lindblad effectives. Figure du bas : Flux en fonction de  $r/r_p$  pour  $\Sigma = \text{cste}$  (ligne solide) et  $\Sigma \propto r^{-3/2}$  (ligne pointillée).

éviter la saturation, il faut soit que la planète migre (voir ci-dessous) à travers la région de corotation en un temps plus court que le temps caractéristique de libration, ce qui suppose un disque très massif, soit qu'il y ait dans le disque une viscosité qui rétablisse le gradient de vortensité (Ward 1992, Masset 2001).

#### 2.6 Dérive orbitale

D'après la troisième loi de Newton, la planète subit un couple opposé à celui qu'elle exerce sur le disque. Dans le cas général, ce couple se traduit par une variation du demi-grand axe et de l'excentricité de l'orbite de la planète. La conservation du moment cinétique donne :

$$\frac{d}{dt}\left(M_p r_p^2 \Omega_p\right) = -T(r_{in}, r_{ext}),\tag{16}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dr_p}{dt} = -\frac{2T(r_{in}, r_{ext})}{M_p r_p \Omega_p}.$$
(17)

Pour une orbite excentrique, la variation de l'excentricité est obtenue en reliant la variation de l'énergie totale au couple exercé. Le temps caractéristique de migration orbitale est :

$$\tau_{\rm I} = \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dt}.$$
(18)

Dans un disque non turbulent et ne contenant pas de champ magnétique, le couple exercé par la planète sur le disque est positif, de sorte que la planète migre vers l'intérieur du disque. Dans le cas d'une perturbation linéaire considérée ici, l'état d'équilibre du disque n'est pas modifié par la planète. Celle-ci excite des ondes de densité qui se propagent vers l'extérieur, superposée à l'état d'équilibre mais sans interaction avec cet état. La planète migre donc *par rapport* au gaz contenu dans le disque.

La figure 4 représente le couple  $T_m(r_{in}, r_{ext})$  exercé par la planète sur le disque en fonction de m. Le couple total, obtenu en faisant la somme sur m, vaut 1362 et 2051 pour  $\Sigma = \text{cste}$  et  $\Sigma \propto r^{-3/2}$  respectivement, en unités  $\Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$ . Lorsque  $\Sigma \propto r^{-3/2}$ , le couple de corotation est nul et le couple de Lindblad est positif. Pour  $\Sigma = \text{cste}$ , le couple de corotation est négatif mais sa valeur absolue est inférieure au couple de Lindblad, qui est toujours positif.

Ward (1986,1997) a montré que le couple de Lindblad dans un disque Képlérien était en général positif. Ce résultat est dû essentiellement au fait que, dans un disque Képlérien et pour un m donné,



Figure 4.: Couple  $T_m(r_{in}, r_{ext})/(\Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2)$  exercé par la planète sur le disque en fonction de m pour  $c = \text{cste et } c/(r_p \Omega_p) = 0.03$  (mêmes paramètres que pour les fig. 1, 2 et 3). Les carrés vides et pleins correspondent respectivement à  $\Sigma \propto r^{-3/2}$  et  $\Sigma = \text{cste}$ .

la résonance de Lindblad effective externe est légèrement plus proche de l'orbite de la planète que la résonance interne. Le couple de Lindblad varie très peu avec la densité surfacique de masse, mais il diminue lorsque la température diminue vers l'intérieur, et devient négatif si cette décroissance est plus rapide que linéaire. Le temps de migration associé au couple de Lindblad dans un disque uniforme est (Ward 1986, 1997) :

$$\tau_{\rm I}(\rm ans) \sim 10^8 \left(\frac{M_{\rm p}}{M_{\oplus}}\right)^{-1} \left(\frac{\Sigma}{\rm g \ cm^{-2}}\right)^{-1} \left(\frac{\rm r}{\rm AU}\right)^{-1/2} \times 10^2 \left(\frac{\rm H}{\rm r}\right)^2, \quad (19)$$

où r est la position initiale de la planète. Pour prendre en compte le gradient de température,  $\tau_{\rm I}$  dans l'expression ci-dessus soit être divisé par un facteur qui vaut approximativement (1 + al), où l est défini par  $T_m \propto r^{-l}$  et a est une constante de l'ordre de l'unité (Ward 1986).

Dans un disque avec  $\alpha = 10^{-2}$  et  $\dot{M} = 10^{-7}$  M<sub> $\odot$ </sub> an<sup>-1</sup>, on a  $H/r \simeq 10^{-1}$  et  $\Sigma \simeq 600$  g cm<sup>-2</sup> (Papaloizou & Terquem 1999), de sorte que  $\tau_{\rm I} \sim 10^5$  ans pour une planète de 1 M<sub> $\oplus$ </sub> à r = 1 ua si on ignore le gradient de température. Dans le même disque, on obtient  $\tau_{\rm I} \sim 10^4$  ans pour une planète de 10 M<sub> $\oplus$ </sub> à r = 5 ua (où  $\Sigma \simeq 300$  g cm<sup>-2</sup> et  $H/r \simeq 10^{-1}$ ). Ces temps sont bien plus courts que le temps de vie des disques ou le temps de formation des planètes. Rappelons cependant que seul le couple de Lindblad a été pris en compte dans cette estimation de  $\tau_{\rm I}$ . Le temps de migration peut être diminué par le couple de corotation. En général, celui–ci est cependant moins important en valeur absolue que le couple de Lindblad (Korycansky & Pollack 1993). D'autre part, l'expression de  $\tau_{\rm I}$  ci–dessus résulte d'un calcul en deux dimensions. En trois dimensions, le couple de Lindblad est diminué, et le temps de migration est plus long d'un facteur 2 ou 3 (Tanaka et al. 2002).

La théorie exposée ci-dessus prédit donc que les planètes terrestres migrent vers l'intérieur du disque avant que celui-ci ne soit dissipé, et que les cœurs de planètes géantes disparaissent également dans les parties internes avant que le gaz de l'enveloppe ne puisse être accrété. La solution à ce problème vient peut-être de la présence d'un champ magnétique dans le disque. En effet, un disque contenant un champ magnétique subthermal est sujet à l'instabilité magnétorotationnelle et devient turbulent (Balbus & Hawley 1991, 1998), ce qui engendre des fluctuations de densité qui rendent la migration de type I stochastique (Nelson & Papaloizou 2004). Pendant la durée des simulations numériques effectuées à ce jour, les cœurs planétaires subissent une marche au hasard et la migration est indéterminée. Notons que, d'après ces simulations, le disque ne semble pas se comporter comme un disque laminaire avec une densité de masse moyenne sur lequel se superposent des fluctuations gaussiennes avec un temps caractéristique égal au temps orbital (Nelson 2005). Il n'est donc pas clair que sur des temps suffisamment longs une migration systématique vers l'intérieur apparaisse.

La migration peut également être ralentie, voire inversée, par l'action d'un champ magnétique global dans le disque (Terquem 2003, Fromang et al. 2005), par la présence de déformations globales du disque dues à une excentricité non nulle (Papaloizou 2002) ou par des transitions dans les régimes d'opacité du disque (Menou & Goodman 2004).

Dans le régime linéaire considéré ici, la perturbation est superposée à l'état d'équilibre du disque mais n'interagit pas avec lui, et le disque n'exerce pas de couple sur la planète. Cependant, en même temps que la planète migre à travers le disque, elle pousse le gaz à l'avant de sa trajectoire. Cela résulte en une augmentation (diminution) de la densité de masse à l'avant (à l'arrière) de la planète. Le couple produit en retour par ce profil de masse perturbé sur la planète s'oppose à son mouvement. La migration de type I est ainsi stoppée lorsque la planète est suffisamment massive pour perturber significativement le profil de densité dans le disque, c'est-à-dire lorsque la perturbation devient fortement non-linéaire (Ward 1997). Comme la viscosité tend à diminuer les perturbations du profil de densité, elle diminue le couple exercé par le disque sur la planète. Par conséquent, le régime linéaire reste valable pour des masses de planètes d'autant plus grandes que la viscosité est importante.

### 3. Migration de type II

Lorsque la planète devient suffisamment massive, la perturbation qu'elle induit dans le disque ne peut plus être considérée comme linéaire : la structure du disque dans le voisinage de la planète est alors modifiée, ce qui se traduit en retour par un couple sur la planète. Si les ondes de densité excitées par la planète sont dissipées localement dans des chocs, le moment cinétique qu'elles transportent est déposé dans le disque au voisinage de la planète, et un sillon (*gap* en anglais) se forme (Goldreich & Tremaine 1980; Lin & Papaloizou 1979, 1993). En effet, de même que dans le cas linéaire, les parties du disque situées en  $r > r_p$  gagnent du moment cinétique lorsque elles interagissent avec la planète, car elles ont une vitesse angulaire inférieure, alors que les parties situées en  $r < r_p$  en perdent. Comme le moment cinétique dans un disque Képlérien augmente avec la distance au centre, le gaz a donc tendance à s'éloigner de l'orbite de la planète.

#### 3.1 Création d'un sillon : premier critère

Le couple de Lindblad est maximum à la position des résonances de Lindblad effectives correspondant à  $m \sim r/H$ . Par conséquent, un sillon se creuse si les ondes excitées à cet endroit se dissipent avant de pouvoir se propager significativement. Si la dissipation est due à la non-linéarité des ondes, cela requiert (Lin & Papaloizou 1993; Korycansky & Papaloizou 1996; Ward 1997) :

$$\frac{M_p}{M_*} \gtrsim 3 \left(\frac{H}{r}\right)^3. \tag{20}$$

Pour  $M_* = 1 \,\mathrm{M}_{\odot}$  et  $H/r \sim 0.1$ ,  $M_p \sim 1 \,\mathrm{M}_J$ . Ce critère est confirmé par les simulations numériques de Papaloizou et al. (2004).

La condition ci-dessus est équivalente à  $R_H > H$ , où  $R_H = r[M_p/(3M_*)]^{1/3}$  est le rayon de Hill de la planète. La largeur du sillon est donc déterminée par le rayon de Hill plutôt que par H.

#### 3.2 Maintien du sillon : second critère

La turbulence dans le disque, qui agit dans une certaine mesure comme une viscosité, tend à faire diffuser le gaz à l'intérieur du sillon. Pour que celui soit maintenu, il faut donc que le couple exercé par la planète soit supérieur au couple 'visqueux' du disque. Nous allons maintenant évaluer le couple exercé par la planète en considérant l'échange de moment cinétique entre la planète et une particule de gaz orbitant dans son voisinage, en supposant qu'un sillon de largeur  $\sim R_H$  existe autour de l'orbite de la planète. Les calculs présentés ici ont été publiés par Lin & Papaloizou (1979, 1993).

La figure 5 illustre la diffusion d'une particule de masse m par la planète de masse  $M_p$  (diffusion de Rutherford). On suppose ici que l'interaction est locale, et on néglige donc la courbure de la trajectoire de la particule. On se place d'autre part dans un référentiel tournant centré sur la planète, mais on néglige les forces d'inertie. Un calcul plus précis prenant en compte ces forces n'ajoute qu'un facteur correctif de l'ordre de l'unité (Goldreich & Tremaine 1980, Lin & Papaloizou 1993). La conservation de l'énergie et du moment cinétique dans le référentiel du centre de masse implique b' = b et  $V_0 = V'_0$ . La variation de vitesse relative  $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}_0$  s'obtient en écrivant la deuxième loi de Newton :

$$\Delta \mathbf{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{GM_p}{r^2} \mathbf{u}_r dt.$$
(21)

Comme  $|\Delta \mathbf{V}| = 2V_0 \sin \delta/2$ , on obtient :

$$2V_0 \sin \frac{\delta}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GM_p}{r^2} \cos \theta dt.$$
 (22)

Les diverses quantités qui interviennent dans ces expressions sont définies sur la figure 5. La conservation du moment cinétique dans le référentiel du Caroline Terquem



Figure 5.: Diffusion d'une particule de masse m par la planète de masse  $M_p$ . Le paramètre d'impact est b et la vitesse relative initiale est  $\mathbf{V}_0$ . Lors de l'interaction, la trajectoire est défléchie d'un angle  $\delta$ . La vitesse relative après l'interaction est  $\mathbf{V}'_0$ . La variation de vitesse est  $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}_0$ .

centre de masse donne  $r^2=bV_0/(d\theta/dt).$  En écrivant l'intégrale ci–dessus sous la forme :

$$\int_{-(\pi+\delta)/2}^{(\pi+\delta)/2} \frac{GM_p}{V_0 b} \cos\theta d\theta, \qquad (23)$$

on obtient alors :

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{GM_p}{V_0^2 b}.$$
(24)

Ainsi qu'il est illustré sur la figure 6, la particule et la planète sont en rotation autour de l'étoile centrale. Le transfert de moment cinétique entre les deux objets dépend de la composante orthoradiale de  $\Delta \mathbf{V}$  (selon  $\mathbf{u}_{\varphi}$ ), c'est-à-dire  $\Delta V_{\varphi} = \Delta V \sin \delta/2$ . Si  $\delta \ll 1$  (la présence d'un sillon de largeur  $\sim R_H$  implique que les particules qui interagissent avec la planète sont suffisamment loin pour que leur trajectoire ne soit que peu déviée), on a :

$$\Delta V_{\varphi} \simeq V_0 \frac{\delta^2}{2} = \frac{2G^2 M_p^2}{V_0^3 b^2},$$
(25)

et la variation de moment cinétique de la particule de masse m par unité de masse est, dans le cas  $b \ll r_p$  (car  $b \simeq R_H$ ),  $\Delta J = r_p \Delta V_{\varphi}$ . La variation de moment cinétique de la planète est, par unité de masse de la particule :



Figure 6.: La particule de masse m et la planète de masse  $M_p$  sont en orbite autour de l'étoile centrale.

 $\Delta J_p = -\Delta J$ . On voit donc que la planète donne du moment cinétique aux parties externes du disque et en prend aux parties internes : le gaz est repoussé de part et d'autre de son orbite.

On suppose qu'un processus dissipatif dans le disque (dû à la turbulence) remet la particule sur une trajectoire circulaire après l'interaction, de sorte que l'échange de moment cinétique entre la particule et la planète se reproduit (cette hypothèse est confirmée par les simulations numériques).

La vitesse relative est  $V_0 = r_p |\Omega(r_p + b) - \Omega(r_p)| \simeq 3b\Omega(r_p)/2$  au premier ordre non nul. L'intervalle de temps entre deux interactions est d'autre part :

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega(r_p + b) - \Omega(r)|} \simeq \frac{4\pi r_p}{3b\Omega(r_p)},\tag{26}$$

et la variation de moment cinétique de la planète par unité de temps et par unité de masse de la particule est  $\Delta J_p/T$ . La variation totale de moment cinétique de la planète due à l'interaction avec les parties externes du disque est alors :

$$\frac{dJ_p}{dt} = \int_{b_{min}}^{+\infty} \frac{\Delta J_p}{T} 2\pi r_p \Sigma_p db = -\frac{8G^2 M_p^2 r_p \Sigma_p}{27\Omega_p^2 b_{min}^3}.$$
(27)

Notons que l'intégration commence à  $b = b_{min}$  et non à b = 0 car on suppose la présence d'un sillon autour de l'orbite de la planète. La variation de moment cinétique due à l'interaction avec les parties internes a la même valeur absolue mais est opposée.

#### Caroline Terquem

Le sillon ne peut donc être maintenu que si  $|dJ_p/dt| > |dJ_{visc}/dt|$ , où  $dJ_{visc}/dt = 3\pi\nu\Sigma_p r_p^2 \Omega_p$  représente le couple visqueux en  $r = r_p$ ,  $\nu$  étant la viscosité cinématique. Si d'autre part  $b_{min} \sim R_H$  (sillon de largeur  $\sim 2R_H$ ), cette condition s'écrit :

$$\frac{M_p}{M_*} > \frac{10\nu}{r_p^2 \Omega_p}.$$
(28)

Pour une valeur typique de  $\nu$  telle  $\nu/(r_p^2\Omega_p) \sim 10^{-5}$ , ce critère donne  $M_p/M_* > 10^{-4}$ , ce qui, pour  $M_* = 1 \,\mathrm{M_{\odot}}$ , correspond à une planète de masse environ un tiers celle de Saturne. Notons cependant que la condition ci-dessus n'est valable qu'à un facteur de l'ordre de l'unité près, car la largeur du sillon peut être un peu plus grande que  $2R_H$ .

Il est important de garder en mémoire que les deux critères (20) et (28) doivent être satisfaits. Le fait que la condition (28) donne de faibles valeurs de  $M_p$  dans un disque de faible viscosité ne signifie donc pas que des planètes de quelques masses terrestres puissent ouvrir un sillon, contrairement à ce qui a été proposé (Rafikov 2002). En effet, même si les ondes excitées par de telles planètes se dissipent dans des chocs, la dissipation n'est pas locale, et le moment cinétique n'est donc pas transféré dans le voisinage de la planète.

Nous avons supposé ci-dessus que le disque avait une viscosité  $\nu$  de type Navier–Stokes. Les simulations numériques de Winters et al. (2003) et Nelson & Papaloizou (2003), dans lesquelles une planète géante interagit avec un disque turbulent, ont cependant montré les limites de cette hypothèse. Elles indiquent qu'effectivement le sillon n'est pas vide lorsque le couple de marée est plus faible que le couple qui tend à faire diffuser la matière à l'intérieur, mais la difficulté est de définir ce couple turbulent. Il apparaît que, si le disque turbulent en l'absence de planète peut être dans une certaine mesure modélisé par une viscosité équivalente  $\nu$  de type Navier–Sokes, cette viscosité est beaucoup plus faible dans le voisinage du sillon lorsqu'une planète est introduite. Il est donc difficile dans ces conditions de savoir quelle valeur de  $\nu$  doit être utilisée dans le critère (28).

#### 3.3 Dérive orbitale

Lorsque les deux critères ci-dessus sont satisfaits, le transfert de masse à travers le sillon est diminué, voire arrêté (Bryden et al. 1999; Kley 1999). Il y a cependant toujours un transfert de moment cinétique des parties internes du disque vers la planète et de la planète vers les parties externes. Si le disque est turbulent, l'ensemble constitué du disque et de la planète, 'coincée' dans son sillon, évolue donc de concert dans un processus de diffusion turbulente. A moins que la planète ne soit située

dans les parties externes du disque, qui peuvent diffuser vers l'extérieur (Lynden–Bell & Pringle 1974), elle migre donc vers l'intérieur. En effet, lors de l'évolution du disque, de la matière est poussée sur le bord externe du sillon alors que le bord interne s'éloigne de la planète. Le couple de Lindblad devient donc plus important sur le bord externe, et la planète se déplace alors vers le bord interne de façon à rétablir l'équilibre. Le temps caractéristique de migration est ici le temps d'évolution 'visqueuse' du disque :

$$\tau_{\rm II}(\rm ans) = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{\rm r}{\rm H}\right)^2 \Omega^{-1} = 0.05 \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\rm r}{\rm H}\right)^2 \left(\frac{\rm r}{\rm AU}\right)^{3/2}, \qquad (29)$$

où la turbulence est modélisée par une viscosité de type  $\alpha$  (Shakura & Sunyaev 1973). Cette migration est dite de type II. Contrairement au cas de la migration de type I, la planète migre ici *avec* le gaz, et non par rapport à lui. Avec  $H/r = 10^{-1}$  et  $\alpha$  dans l'intervalle  $10^{-3}-10^{-2}$ , on obtient  $\tau_{\rm II} \sim 5 \times 10^2 - 5 \times 10^3$  ou  $6 \times 10^3 - 6 \times 10^4$  ans à r = 1 ou 5 ua, respectivement. Là encore, ces temps sont bien plus courts que la durée de vie des disques ou les temps de formation des planètes.

L'expression de  $\tau_{\text{II}}$  est indépendante de  $M_p$  et de  $\Sigma$ , mais nous avons implicitement supposé que la masse de gaz à l'intérieur de l'orbite de la planète était au moins de l'ordre de  $M_p$ . En effet, si le disque était moins massif, il n'y aurait pas assez de gaz dans le voisinage de la planète pour absorber son moment cinétique orbital, et la migration serait ralentie (Syer & Clarke 1995, Ivanov et al. 1999).

Aucun mécanisme général capable d'arrêter la migration de type II n'a été proposé à ce jour (voir Papaloizou & Terquem 2006 pour une liste des mécanismes pouvant opérer dans des conditions particulières). Il est possible que seule la masse de gaz encore dans le disque après la formation des planètes géantes détermine si cette migration a lieu ou non.

Il existe un régime de transition dans lequel la planète n'est pas assez massive pour créer un sillon, mais est assez massive pour que l'interaction ne soit pas linéaire. Dans ces conditions, la densité de masse dans le voisinage de la planète est réduite, mais la région de corotation n'est pas vide. L'évolution est alors contrôlée à la fois par la viscosité du disque et par l'action du couple exercé par la planète sur le disque perturbé. Dans ce régime, une migration très rapide et qui 's'emballe' peut se produire (*runaway migration*, Masset & Papaloizou 2003). Ce processus, aussi appelé migration de type III, est dû au couple de corotation et concerne des planètes dont la masse va d'une fraction de celle de Saturne à ~ 1 M<sub>J</sub> et qui sont dans un disque massif.

## 4. Conclusion

Comme il apparaît clairement ci–dessus, la migration n'affecte pas seulement les planètes géantes, mais également les cœurs solides de faibles masses. Un cœur de 0.1  $M_{\oplus}$  à 1 ua migre en effet avec un temps caractéristique de quelques millions d'années, ce qui est comparable au temps de vie des disques et de formation des planètes. La migration affecte donc la formation même des planètes (Ward & Hahn 1995, Papaloizou & Terquem 1999).

La migration orbitale est nécessaire pour expliquer les observations de planètes extrasolaires sur des orbites très serrées, mais également la commensurabilité des orbites et les résonances apsidales dans certains systèmes multiples extrasolaires.

Des progrès considérables ont été faits au cours de ces dix dernières années dans la compréhension des interactions disque/planètes. Des simulations numériques à trois dimensions prenant en compte une turbulence MHD générée à partir de principes physiques de base, plutôt qu'une viscosité *ad hoc*, sont maintenant réalisées. Elles montrent que la migration orbitale est fortement influencée par la turbulence, particulièrement dans le régime des planètes de faibles masses. Des études analytiques et numériques ont également montré que la présence d'un champ magnétique à grande échelle ou une excentricité orbitale e > H/rpouvaient avoir une influence significative sur la migration.

Il n'est cependant pas encore possible de prendre en compte simultanément tous les processus qui interviennent dans la formation des planètes pour modéliser l'évolution d'un système planétaire de la naissance à son état final. Cela nécessiterait en effet des simulations globales extrêmement complexes. D'autre part, l'état final des systèmes planétaires (masses et configuration orbitale) dépend très fortement des conditions initiales, qui sont mal contraintes. La masse du disque lorsque les planètes commencent à se former, en particulier, détermine la possible occurence des instabilités gravitationnelles, la masse des cœurs qui peuvent être assemblés et les taux de migration. L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs et des observations de plus en plus fines permettront d'accroître notre compréhension de la formation et de l'évolution des systèmes planétaires.

**Remerciements.** Je remercie Sébastien Fromang pour ses commentaires et corrections sur ce chapitre.

## Références

- [1] Artymowicz, P., 1993, ApJ, 419, 155
- [2] Artymowicz, P., 2004, Astron. Soc. Pac., 324, 39

- [3] Balbus, S. A., Hawley, J. F., 1991, ApJ, 376, 214
- [4] Balbus, S. A., Hawley, J. F., 1998, Rev. Mod. Phys., 70, 1
- [5] Bertin, G., Lin, C. C., 1996, 'Spiral Structure in Galaxies A density wave theory' (The MIT Press : Cambridge)
- [6] Bryden, G., Chen, X., Lin, D. N. C., Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., 1999, ApJ, 514, 344
- [7] Fromang, S., Terquem, C., Nelson, R. P., 2005, MNRAS, 363, 943
- [8] Goldreich, P., Tremaine, S., 1979, ApJ, 233, 857
- [9] Goldreich, P., Tremaine, S., 1980, ApJ, 241, 425
- [10] Ivanov, P. B., Papaloizou, J. C. B., Polnarev, A. G., 1999, MNRAS, 307, 79
- [11] Kley, W., 1999, MNRAS, 303, 696
- [12] Korycansky, D. G., Papaloizou, J. C. B., 1996, ApJ Sup., 105, 181
- [13] Korycansky, D. G., Pollack, J. B., 1993, Icarus, 102, 105
- [14] Lin, C. C., Shu, F. H., 1964, ApJ, 140, 646
- [15] Lin, D. N. C., Papaloizou, J. C. B., 1979, MNRAS, 186, 799
- [16] Lin, D. N. C., Papaloizou, J. C. B., 1986, ApJ, 309, 846
- [17] Lin, D. N. C., Papaloizou, J. C. B., 1993, Protostars and Planets III, ed E. H. Levy and J. I. Lunine (Tucson : University of Arizona Press), p. 749
- [18] Lynden–Bell, D., Kalnajs, A. J., 1972, MNRAS, 157, 1
- [19] Lynden–Bell, D., Pringle, J. E., 1974, MNRAS, 168, 60
- [20] Malhotra, R., 1993, Nature, 365, 819
- [21] Masset, F., 2001, ApJ, 558, 453
- [22] Masset, F., Papaloizou, J. C. B., 2003, ApJ, 588, 494
- [23] Menou, K., Goodman, J., 2004, ApJ, 606, 520
- [24] Murray, N., Hansen, B., Holman, M., Tremaine, S., 1998, Science, 279, 69
- [25] Nelson, R. P., 2005, A&A, 443, 1067
- [26] Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., 2003, MNRAS, 339, 993
- [27] Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., 2004, MNRAS, 350, 849
- [28] Papaloizou, J. C. B., 2002, A&A, 388, 615
- [29] Papaloizou, J. C. B., Lin, D. N. C., 1984, ApJ, 285, 818
- [30] Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., 2005, A&A, 433, 247
- [31] Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., Snellgrove, M. D., 2004, MNRAS, 350, 829
- [32] Papaloizou, J. C. B., Terquem, C., 1999, ApJ 521, 823
- [33] Papaloizou, J. C. B., Terquem, C., 2006, Reports on Progress in Physics, 69, 119

- [34] Rafikov, R., 2002, ApJ, 572, 566
- [35] Rasio, F. A., Ford, E. B., 1996, Science, 274, 54
- [36] Shakura, N. I., Sunyaev, R. A., 1973, A&A 24, 337
- [37] Syer, D., Clarke, C. J., 1995, MNRAS, 277, 758
- [38] Tanaka, H., Takeuchi, T., Ward, W. R., 2002, ApJ, 565, 1257
- [39] Terquem, C. E. J. M. L. J., 2003, MNRAS, 341, 1157
- [40] Toomre, A., 1981, in *The Structure and Evolution of Normal Galaxies*, eds. S. M. Fall, D. Lynden–Bell (Cambridge : Cambridge Univ. Press), p. 111
- [41] Ward, W. R., 1986, Icarus, 67, 164
- [42] Ward, W. R., 1989, ApJ, 336, 526
- [43] Ward, W. R., 1992, in Astrophysical Disks, Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 675, eds S. F. Dermott, J. H. Hunter, Jr., and R. E. Wilson (New York : The New York Academy of Sciences), p.314
- [44] Ward, W. R., 1997, Icarus, 126, 261
- [45] Ward, W. R., Hahn, J. M., 1995, ApJ, 440, L25
- [46] Weidenschilling, S. J., Marzari, F., 1996, Nature, 384, 619
- [47] Winters, W. F., Balbus, S. A., Hawley, J. F., 2003, ApJ, 589, 543